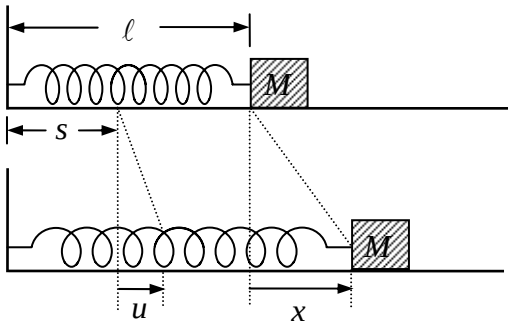
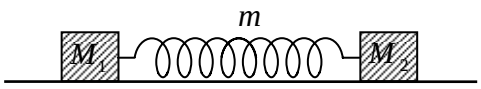
彈簧質量對簡諧振盪頻率的影響

(a)如圖 4-a 所示，一條彈性常數為 k、自然長度為 ℓ、質量為 m 的彈簧，置放在水平的光滑桌面上。彈簧的一端固定在牆面上，另一端繫有一質量為 M 的質點。假設 $M >> m$，且在彈簧系統的運動過程中，彈簧上某處的長度伸縮量 u 和該處至固定端的距離 s 成正比，即 $\frac{u}{s}=\frac{x}{\ell}$，式中 x 為該彈簧的總伸長量。試求該系統的振盪頻率，以已知量表示之。



圖

(b)如圖 4-b 所示，今將(a)小題的彈簧同樣置於水平的光滑桌面上，但兩端各繫上



圖

質量為 M_1 和 M_2 的質點。假設 $M_1 >> m$ 和 $M_2 >> m$，在該彈簧系統的運動過程中，彈簧長度的伸縮情形如同(a)小題所述，試求：

(i)該系統的振盪頻率，以已知量表示之。

(ii)若將系統的振盪頻率寫成 $\omega = \sqrt{\frac{k}{M_{eff}}}$ 的形式，試求 M_{eff} 的數學式，並近似至 m 的一次方。若 $M_1 = M_2 = M$ ，則該系統的振盪頻率為何？