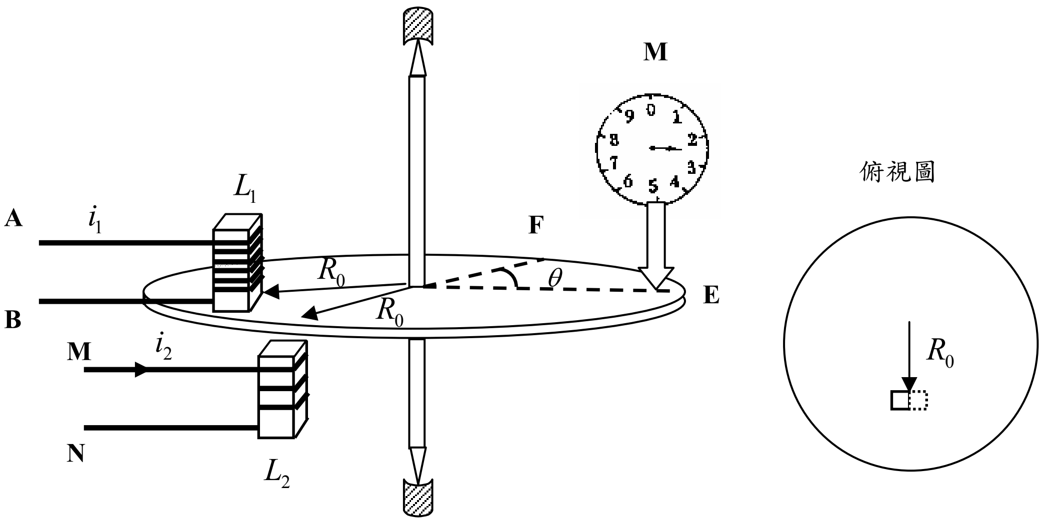
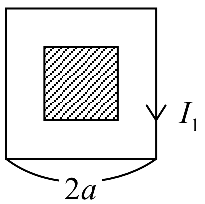
電錶的簡化模型

下圖所示為電錶構造的一簡化模型，其包括了一厚度為 h、可繞中心自由轉動之金屬盤，並且右上方有一能量測其轉動角度 θ 之儀錶 M。今在距中心 R_0 之正上方與正下方置放兩相鄰、側向錯開之方型電流線圈，其俯視圖如右圖所示。方型線圈上將各通以外加電流 i_1 以及 i_2，線圈之單位長度線圈數各為 n_1 與 n_2 且於其內置放磁導率為 μ 之軟鐵以導磁，線圈邊長皆為 a，大小相對於 R_0 可忽略不計，並假設線圈與金屬盤之間的距離可被忽略。



(a)若兩線圈上之電流是交流電，則在金屬盤上將產生感應電流。設金屬盤之電阻率為 ρ 並假設感應電流所產生磁場再產生二次以上之感應電流的效應可被忽視。如下圖所示，當考慮線圈 1(2)所產生之感應電流與線圈 2(1)所產生磁場之交互作用時，可將受到交互作用所有之感應電流視為在邊長為 2a 之方形導線上傳導。若 $i_1 = \alpha \sin \omega t$，求 I_1。註：$\frac{d\sin(\omega t+\phi)}{dt} = \omega\cos(\omega t+\phi)$，$\frac{d\cos(\omega t+\phi)}{dt} = -\omega\sin(\omega t+\phi)$。



(b)若金屬盤轉動受到很大的阻尼以至於可忽略其轉動慣量，假設阻尼所造成的

力矩正比於角速度，其正比係數為λ。今兩線圈各通以電流$i_1 = \alpha\, sin\,\omega t$以及$i_2 = \beta\, sin(\omega t + \phi)$，其中$\phi$為兩電流之相位差，若金屬盤在$t = 0$時，$\theta$及角速度皆為 0，實驗發現$\theta(t) = \gamma\alpha\beta \sin\phi t$（由 E 為起點，逆時針之$\theta$為正），試估算$\gamma$。

(a) 若兩線圈之電感各為L_1與L_2，在$t = 0$時(此時θ及角速度皆為 0)，將 A、B、M 與 N 各點接到以下之電路，假設交流電壓$\varepsilon = \varepsilon_0\, sin\,\omega t$，且$\omega L_2 << R$或$1/\omega C$，試以$\theta(t)$及(a)小題之$\gamma$估算電阻$R$由$t = 0$到$t$所消耗的能量。註：$sin\, n\omega t$與$cos\, n\omega t$（$n = 1,2,3,...$）之平均為$0$，而$sin^2 n\omega t$與$cos^2 n\omega t$（$n = 1,2,3,...$）之平均為$1/2$。