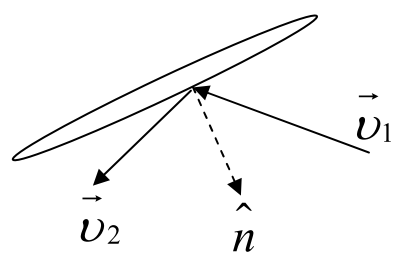
打水漂兒(ricochet or stone skipping)的簡化模型

大多數人都有玩過打水漂兒的經驗。經驗上，石頭要夠扁平、夠圓；投的速度要夠快且與水面之夾角要小；再加上對石頭中心軸的旋轉，可以讓水漂兒打的次數多且遠。世界上有許多業餘的打水漂兒比賽，目前水漂兒彈跳次數的非正式世界記錄為 38 次，由 J. Coleman-McChee 於 1992 所創。嚴格的分析打水漂兒之過程需要分析石頭與水面碰撞時水面及水面下的流體運動的細節，然而若只要大致了解石頭與水之碰撞過程，以下的簡化模型已足夠給予半定量之了解。

(a) <u>物體在流體中所受之昇力(lift force)</u>

物體在流體中運動時，會受到昇力與阻力，因此需要施加外力，物體才能維持等速運動。當物體速度夠大可不計黏滯力時，昇力表現在流體經過物體時速度方向的改變。設ρ為流體的密度，流體流經物體某一表面(表面的方向為$\hat{n}$，如圖一所示)時，流體相對物體的速度由$\vec{\upsilon}_1$轉變為$\vec{\upsilon}_2$，求物體表面沿法線方向$\hat{n}$、單位面積所受之昇力。

圖一

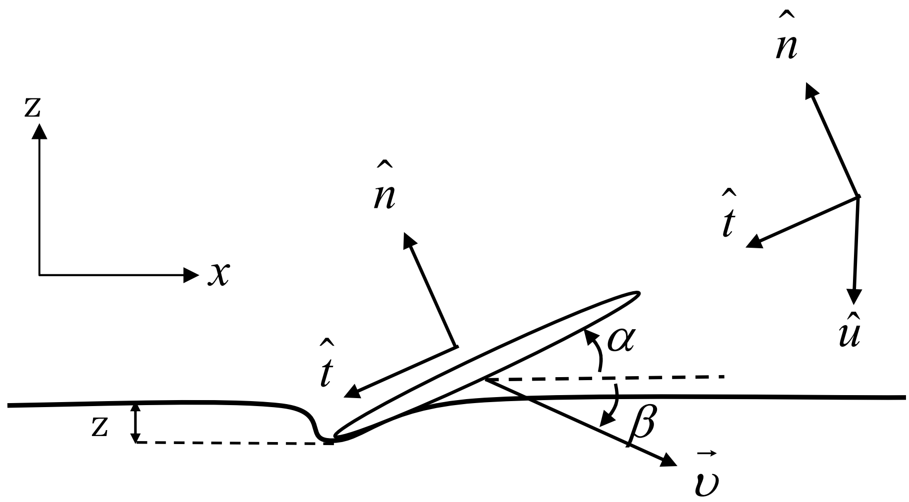


(b) <u>石頭完全進入水中之運動</u>

除了昇力外，物體在流體中運動時亦受阻力。當物體速度夠大可不計黏滯力時，阻力表現在流體經過物體時之速度大小的改變。由於流體在物體附近速度的改變與物體的速度υ成正比，故依據白努利定律，物體前後之壓力與速度平方成正比，因此阻力與物體之速度(υ)平方成正比。當石頭完

全進入水中後，相對於石頭，水的流速與υ平行，故流經物體的水流方向不變，因此可假設此時物體所受之力完全為阻力，則依據以上的描述，阻力與石頭速度平方成正比，且方向與速度方向相反(這就是一般書上所說的阻力公式)，試問當石頭完全進入水中後，水的阻力是否可能將石頭的垂直運動方向反轉而使石頭衝出水面？試以上述阻力公式說明或証明你的結論。

圖二



(c)　<u>石頭與水面接觸時之運動</u>

分析水漂兒運動的重點在於分析當石頭與水面接觸尚未完全沒入水中之階段的運動。此時，石頭所受之力F仍與速度平方成正比，但由於石頭受力之不對稱，必需同時考慮昇力與阻力，因此F不再與速度方向相反，且因為受力來自與水之接觸，故F與石頭入水的深度成正比。圖二所示為一典型打水漂兒所用的石頭接觸水面的側視圖，設α為石頭與水面之夾角，β為石頭速度$\vec{\upsilon}$與水面之夾角，$\hat{n}$與$\hat{t}$各為平行與垂直石頭表面之單位向量，且$\hat{n}$、$\hat{t}$與$\hat{u}$形成一直角座標系。依據以上的考慮，石頭所受流體之力可以下式表示:

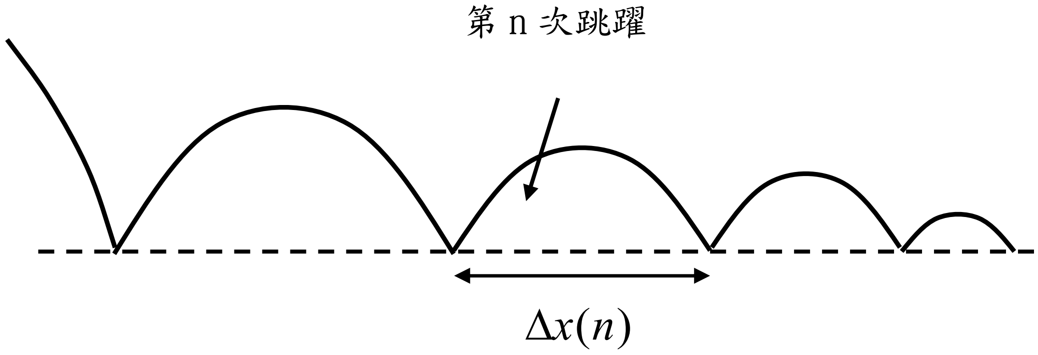
$$\vec{F} = \frac{\rho}{2} C_t \upsilon^2 A_W \hat{t} + \frac{\rho}{2} C_n \upsilon^2 A_W \hat{n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其中A_W石頭與水接觸之面積，C_t與C_n為與物體形狀有關之係數，理論上

C_t與C_n各與$\hat{t}\cdot\hat{\upsilon}$及$\hat{n}\cdot\hat{\upsilon}$有關，即與$\alpha$及$\beta$有關，不過在以下的模型中，將假設$C_t$與$C_n$皆為常數。為了方便分析，假設石頭在$\hat{t}$與$\hat{u}$方向為一邊長為b之方形扁石塊，假設石頭的初速度$(\upsilon_{0x},\upsilon_{0z})$夠大使得與水面之碰撞時間很短，故在估算受力時可以忽略速度隨時間的變化，若速度與水面之夾角很小且石頭的質量為m，<u>在α固定的情況下</u>，利用(1)式說明石頭深入水中深度 z（z=0 為水面且圖三中 z<0）的運動為有外力的簡諧運動，求 z 之運動方程式。結合(b)小題，求石頭與水面撞擊的時間τ_0以及能使石頭彈離水面υ_{0x}之最小值υ_x^c。說明當石頭能反彈時，在撞擊的時間τ_0內，平均而言石頭在 z 方向所受流體之平均力$\langle F_z\rangle = mg$。

(d) <u>連續彈跳與最大彈跳次數</u>

圖三



接(c)小題，若石頭的初速如果夠大，石頭可彈跳多次，但其 x 方向之速度因受力而逐漸變小，因此打擊水面的漣漪變密集（如圖三所示）。設$\upsilon_{0x} \gg \upsilon_x^c$，且速度與水面之夾角很小，在此情況下說明，在撞擊的時間τ_0內之石頭在 x 方向的平均受力與動磨擦力相似：$\langle F_x\rangle = \mu mg$，試求$\mu$。假設在每次碰撞時，估算阻力可以忽略速度的變化，若$\alpha \approx \beta \approx 10^\circ$、$m = 0.1kg$、$C_t \approx C_n \approx 1$、$b = 0.1m$、$\rho = 1000kg/m^3$，估計擲出 38 次世界記錄之石頭的初速度的 x 分量υ_{0x}。若$\Delta x(n)$為石頭第 n 次跳躍之距離，試以n、最大彈

跳次數n_c、及石頭初速$(\upsilon_{0x},\upsilon_{0z})$表示$\Delta x(n)$以說明漣漪變密集與$i$之關係。

(e) <u>轉動的影響</u>

以上的分析顯示了在最佳的情況下若α愈小，石頭所受推力愈大，對石頭能彈跳之次數愈多，不過石頭的轉動並未被考慮，一旦考慮石頭的轉動，α會因為石頭撞擊水面時受到的力矩而改變，進而破壞最佳情況，因此能讓α變動愈小愈好。與陀螺儀的原理相似，這就是何以撞擊水面前石頭必須對$\hat{n}$軸有足夠轉動的原因，其目的就是為了能讓α的變動愈小愈好。為了方便考慮石頭的轉動，假設石頭在$\hat{t}$與$\hat{u}$方向為半徑R之圓形，如果石頭對$\hat{n}$軸的轉動角速度為ω，則為了穩定α角，ω必需夠大，即$\omega \gg \omega_0$，試估計ω_0及其數量質(取$R = 1cm$)。