Conversion between Gaussian & MKS

Gaussian :
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$
$$\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

L, M, T = cm, g, sec

MKS :
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7}c^2 \frac{\text{Newton m}^2}{(\text{Coulomb})^2}$
$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$
$$\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

L, M, T = m, kg, sec

(i) charge 之單位：由 Force 來換

Gauss : stat coulomb (或 e.s.u.)

$$\Rightarrow \frac{(1\ \text{state Coulomb})^2}{1\ \text{cm}^2} = 1\ \text{dyne}$$

$$\therefore (1\ \text{state Coulomb})^2 = 1\ \text{cm}^2 \cdot 1\ \text{dyne}$$

要和 MKS 連接： $1\ \text{cm}^2 = 10^{-4}\text{m}^2$, $1\ \text{dyne} = 10^{-5}$ Newton

$$\therefore \frac{(1\ \text{Stat Coulomb})^2}{1\ \text{m}^2} \text{ 所產生之力} = 10^{-4}\text{dyne}$$
$$= 10^{-9}\ \text{Newton}$$

∴若設 $1\,\text{statcoulomb} = \frac{1}{\beta}\,\text{Coulomb}$

在 MKS 下，產生之力為

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\frac{1}{\beta^2}}{1\,m^2}\ \text{Newton} = 10^{-7}c^2\frac{1}{\beta^2}\ \text{Newton}$$

$$\therefore \frac{10^{-7}c^2}{\beta^2} = 10^{-5}$$

$$\therefore \beta = \overset{\swarrow 3\times10^{8}}{c} \times 10$$

$$\therefore 1\,\text{Coulomb} = 3\times10^{9}\ 1\,\text{statcoulomb}$$

因此，電子之電荷 $= 1.6\times10^{-19}$ Coulomb

$= 4.8\times10^{-10}$ statcoulomb (e.s.u) $-\mu_b\cdot B$

~~即在 Gaussian 單位中，$\frac{e}{c}$ 相當於 M.K.S 中之 e！~~

(ii) M.K.S. $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ （如 $\mu_b = \frac{e\hbar}{2mc} \to \frac{e\hbar}{2m}$）

由 $\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$ 可知 Gaussian: $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B})$

Chapter 13. 電磁場之描述及靜磁的作用 (3rd. Chapter 16)

12章中氫原子之能譜只考慮含靜電場的作用 (即 Coulomb 作用)

最廣義，我們要考慮的是電磁場 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 及 $\vec{B}(\vec{r},t)$

* 電磁場在古典中的角色

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\left(\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}(\vec{r},t)\right) \qquad (c.g.s)$$

①

* 量子的描述呢？

Hint: Schrödinger 方程式中只有位能的角色

例: $\vec{E} = E_0\hat{x}$

明顯的，我們可以用位能 $\phi = -E_0 x$ 來描述。

此時 $V = q\phi$

∴ Schrödinger eq. $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi - qE_0 x\psi = i\hbar\frac{d\psi}{dt}$

(忽略了y及z方向)

註: 此方程式可由 $x = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$ 來解

注意，ϕ的零點是可以任意定的，∴較嚴格之

作法為： $\phi = -E_0 x + \phi_0$

不過，由於 $q\phi_0 = V_0$ 為一常數，只會貢獻 $e^{-\frac{i}{\hbar}V_0 t}$

一個共通的因子，所以不影響物理結果及電場！

上面的例子，提醒了我們要使用位能來描述電磁場。

(i) 電磁場的位能描述

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} \qquad \vec{A} = \text{vector potential} \Rightarrow \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

source free 方程式 ⇓ 自動滿足

有source之Maxwell方程式

$$\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \quad \therefore \quad -\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A}) = 4\pi\rho(\vec{r},t) \quad \text{—} ②$$

$$\nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t)$$

$$\Rightarrow \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t)$$

$$-\nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) \quad \text{---} ③$$

由此可以得 Maxwell 方程式以 ② 及 ③ 式取代。

(ii) Gauge invariance

所謂的 gauge invariance 是之前所說的"位能零點不影響電場"之推廣：

首先：加一個 ∇f 到 $\vec{A}$ 並不影響 $\vec{B}$ ： $\vec{A}' = \vec{A} - \nabla f$

$$\nabla\times\vec{A}' = \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

$$(\because \nabla\times\nabla f = 0)$$

但若 $f = f(\vec{r},t)$ 和 t 有關，則 $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ 會多了 $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla f(\vec{r},t)$ 一項，因此，$\phi(\vec{r},t)$ 也要做以下的變換： $\phi'(\vec{r},t) = \phi + \frac{1}{c}\frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t}$

∴在

gauge transformation 下：$\vec{A}' = \vec{A} - \nabla f$

$\Phi' = \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$

電磁場：$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$

$\vec{E}' = -\nabla\Phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

不變！(gauge invariance)

(iii) Gauge Choices

gauge invariance 告訴我們，給定 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 及 $\vec{B}(\vec{r},t)$

有無限多組 $(\Phi(\vec{r},t), \vec{A}(\vec{r},t))$ 可以描述 $\vec{E}$ 及 $\vec{B}$！

因此，可以選擇適當的條件來約束 $\vec{A}$ 及 Φ 使 ② 及 ③ 式更簡潔！

例：Coulomb gauge：當 $\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})$ 與 time 無關時

我們令 $\nabla\cdot\vec{A} = 0$ 來約束 $\vec{A}$，此時 ② 式

$\Rightarrow \nabla^2\Phi = -4\pi\rho(\vec{r})$. ∴ Φ 與 t 無關，回到靜電學.

∴ ③ 式 $\Rightarrow -\nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}(\vec{r},t)$

因此，Φ 與 $\vec{A}$ 之方程式彼此獨立！

若 $\vec{A}$ is static

$\nabla^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}(\vec{r})$

但代價是解 $-\nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}(\vec{r},t)$ 時

必須同時要求 $\nabla\cdot\vec{A} = 0$！

例：Lorentz gauge：若 ρ 與 t 有關，可以

要求 $\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$

此時 ② 及 ③ 式變成

$\phi,\vec{A}$ 皆與 t 有關！

$$-\nabla^2\phi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi=4\pi\rho \quad — ④$$

$$-\nabla^2\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}(r,t) \quad — ⑤$$

ϕ 及 $\vec{A}$ 有对稱性

注意：此時要求 $\vec{A}$ 及 ϕ 滿足 $\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$

即在要求电荷守恒：$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}④+\nabla\cdot⑤=0$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j}=0$$

(iv) 在电磁場中之 Schrödinger 方程式：

首先，我們必須在古典的 level 上，將 ① 式

以 $\hat{H}$ (Hamiltonian) 重寫：

$\vec{E},\vec{B}=0$ 時

$H=\frac{p^2}{2m}+V(\vec{r})$

$$\begin{cases}\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}=\frac{p_i}{m}\\ \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}=-\frac{\partial V}{\partial x_i}\end{cases}$$

$$\therefore\ m\frac{d^2x_i}{dt^2}=-\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$\vec{E},\vec{B}\neq0$. claim：$H=\frac{1}{2m}(\vec{P}-\frac{q}{c}\vec{A})^2+q\phi$，此處 $\vec{A}(\vec{r},t)$

$=\vec{A}(\vec{r}(t),t)$

$\uparrow$

質點所在之位置

check：$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}=\frac{1}{m}(p_i-\frac{q}{c}A_i)$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\underbrace{\sum_K \frac{(p_K - \frac{q}{c}A_K)}{m}}_{\frac{dx_K}{dt} = v_K} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{q}{c}A_K\right) - q\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

$$\therefore \quad m\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{dp_i}{dt} - \frac{q}{c}\frac{d}{dt}A_i(\vec{r}(t), t)$$

$$= \frac{dp_i}{dt} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \sum_K \frac{q}{c}\frac{dx_K}{dt}\frac{\partial A_i}{\partial x_K}$$

$$= \boxed{-q\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} + \frac{q}{c}\sum_K v_K \times \frac{\partial A_K}{\partial x_i} \boxed{-\frac{q}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}}$$

$$+ \sum_K -\frac{q}{c}\frac{dx_K}{dt}\frac{\partial A_i}{\partial x_K}$$

$$= qE_i + \frac{q}{c}\sum_K \underbrace{\left(-v_K\frac{\partial A_i}{\partial x_K} + v_K\frac{\partial A_K}{\partial x_i}\right)}_{\begin{gathered} \parallel \\ (\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}))_i \\ \parallel \\ \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} \end{gathered}}$$

$$\therefore \quad m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right) \text{ is recovered.}$$

Schrödinger eq. $\quad \hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}$

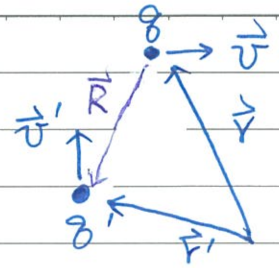
$$\therefore \quad \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\phi\right]\psi = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{---} (6)$$

當 ~~[illegible]~~ 中與 t 無關，可以選 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r})\right)^2 + q\phi(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad \text{---} (7)$$

若與 t 無關，此為靜電及靜磁的問題

∴若有另一個电荷 q', 則所受之力為



$$\vec{F}_{q'} = \frac{1}{c} q'\vec{v}' \times \left(\frac{1}{c}\frac{q\vec{v}\times\vec{R}}{R^3}\right)$$

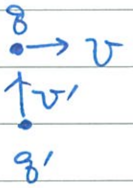
而 q 所受之力

$$\vec{F}_q = \frac{1}{c} q\vec{v}\times\left(\frac{1}{c}\frac{q'\vec{v}'\times(-\vec{R})}{R^3}\right) \qquad \vec{R}=\vec{r}'-\vec{r}$$

$$= -\frac{qq'}{c}\frac{\vec{v}\times(\vec{v}'\times\vec{R})}{R^3}$$

由此可見, $\vec{F}_q + \vec{F}_{q'}$ 一般 $\neq 0$

特例



$\vec{F}_{q'} \neq 0$, $\vec{F}_q = 0$

因此 $\frac{d}{dt}m'\vec{v}' + \frac{d}{dt}m\vec{v} \neq 0$

Why? 這是因為磁場也帶有動量.

要說明此点, 首先, 我們有

$$\vec{v}\times(\vec{v}'\times\vec{R}) = \vec{v}'(\vec{v}\cdot\vec{R}) - (\vec{v}\cdot\vec{v}')\vec{R}$$
$$\vec{v}'\times(\vec{v}\times\vec{R}) = \vec{v}(\vec{v}'\cdot\vec{R}) - (\vec{v}\cdot\vec{v}')\vec{R}$$

$$\therefore \vec{F}_q + \vec{F}_{q'} = \frac{qq'}{c^2}\left[\vec{v}'\frac{\vec{v}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \frac{\vec{v}(\vec{v}'\cdot(\vec{r}'-\vec{r}))}{R^3}\right]$$

$$\because \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\therefore \frac{qq'}{c^2}\vec{v}'\left[\frac{\vec{v}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right] = -\frac{q}{c}\left(\vec{v}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\frac{q'\vec{v}'}{c}$$

$$= -\frac{q}{c}(\vec{v}\cdot\nabla)\underbrace{\left[\frac{q'\vec{v}'}{c|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]}_{\text{此為}q'\text{所產生之}A} = -\frac{q}{c}(\vec{v}\cdot\nabla)A(\vec{r})$$

在q之位置上

同理 $\frac{qq'}{c^2}\vec{v}\frac{\vec{v}'\cdot(\vec{r}'-\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\frac{q'}{c}(\vec{v}'\cdot\nabla')\vec{A}(\vec{r}')$

而 $\vec{r},\vec{r}'$ 皆為 t 之函數

$$\therefore (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}(\vec{r}(t)) = \frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{r}(t))$$
$$(\vec{v}'\cdot\nabla')\vec{A}(\vec{r}'(t)) = \frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{r}'(t))$$

$$\therefore \vec{F}_q+\vec{F}_{q'} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r}(t))+\frac{q'}{c}\vec{A}(\vec{r}'(t))\right)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(mv+\frac{q}{c}A(\vec{r})\right)+\frac{d}{dt}\left(m'v'+\frac{q'}{c}A(r')\right)=0$$

即 generalized momentum $\vec{P}$ 是守恒的.

說明: ∵ $\vec{A}$ 與 t 無關, 由 page 13-4 ⑪式

$$\nabla^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J} \iff \nabla^2\phi = -4\pi\rho$$

可見 $\vec{A}(\vec{r}) = \int\frac{\vec{J}(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r' \iff \phi(\vec{r}) = \int\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'$

點電荷 $\vec{J}(r) = q\vec{v}\,\delta(\vec{r}'-r_0(t))$

$$\therefore \vec{A}(\vec{r}) = \frac{q\vec{v}}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t)|}$$

何以要以 $\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}$ 之形式出現？

由p13-4 可知 $m\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}$

即 $m\vec{v} = \vec{p}-q/c\,\vec{A}$

$m\vec{v}$ 為直接牽涉到 velocity 之量，稱為 mechanical momentum ($\vec{\pi}$)

$\vec{p}$ 則是 "generalized momentum".

$\therefore \vec{p} = \underbrace{m\vec{v}}_{\vec{\pi}} + q/c\,\vec{A}$,

注意：$\vec{\pi}$ 是 直接可測之量，而 $\vec{A}$ 則沒有絕對物理意義，因此，$\vec{p}$ 的絕對值沒有意義。

不過，$\vec{p}$ 的引入卻是必要的！

原因是在有磁場下，mechanical momentum 並不守恆.
我們將發現，引入 $\vec{p}$ 可以維持動量守恆
例：Biot-Savart law 告訴我們一段電流

$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{i\,d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$

$\therefore$ 一個以 $\vec{v}$ 運動之電荷 q，取 $d\vec{l} = \vec{v}\,dt$

則 $i\,d\vec{l} = \frac{q}{dt}\vec{v}\,dt = q\vec{v}$

$\therefore \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$ $\qquad \overset{q}{\bullet}\!\longrightarrow \vec{v}$

靜磁場的作用

為了簡化問題，我們先考慮均勻磁場

$\uparrow \vec{B}$，　$\vec{A}$ 可以取為 $\frac{-1}{2}\vec{r}\times\vec{B}$　若設 $\vec{B}=B\hat{z}$

又稱為 symmetry gauge，对於有中心之物系如原子較用好

可以 det：$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{2}yB & \frac{1}{2}xB & 0 \end{vmatrix}$，　$\vec{A}=\frac{-1}{2}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}$

$= \left(-\frac{1}{2}yB, \frac{1}{2}xB, 0\right)$

$=\hat{z}\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}B\right) = B\hat{z}$　，且 $\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-1}{2}By\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}xB\right)=0$

將 $\vec{A}$ 代入⑦式

$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r})\right)^2 = \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)$$

$$= -\hbar^2\nabla^2 + i\frac{q\hbar}{c}\vec{A}\cdot\nabla + \left(\frac{-\hbar}{i}\right)\frac{q}{c}\nabla\cdot\vec{A} - \frac{\hbar}{i}\frac{q}{c}\vec{A}\cdot\nabla + \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2$$

$$= -\hbar^2\nabla^2 + 2i\frac{q\hbar}{c}\vec{A}\cdot\nabla + \frac{q^2}{c^2}A^2$$

其中 $q=-|e|$，∴ 第二項 $= -\frac{2i|e|\hbar}{c}\vec{A}\cdot\nabla$

$= -\frac{2i|e|\hbar}{c}\frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}\cdot\nabla$

$= -i\frac{|e|\hbar}{c}\vec{B}\cdot\vec{r}\times\nabla = \frac{|e|}{c}\vec{B}\cdot\vec{L}$

第三項 $= \frac{e^2}{4c^2}(\vec{B}\times\vec{r})^2 = \frac{e^2}{4c^2}B^2(x^2+y^2)$

因此(7)式

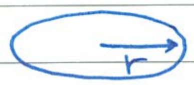
$$\Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \underbrace{- \frac{e}{2mc}\underbrace{\vec{B}\cdot\vec{L}}_{BL_z}}_{H_1} + \underbrace{\frac{e^2B^2}{8mc^2}\underbrace{(x^2+y^2)}_{\rho^2}}_{H_2}\right]\psi = E\psi$$

effect 1. Normal Zeeman effect: H_1

$$H_1 = -\frac{e}{2mc}\vec{L}\cdot\vec{B} \equiv -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

其中 $\vec{\mu} = \frac{e}{2mc}\vec{L}$ 為所謂的 magnetic moment.

$\vec{\mu}$ 和 $\vec{L}$ 之關係的物理圖像如下:



角動量為質量作圓周運動所產生的量 $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$

magnetic moment (dipole) (磁偶極)則為帶電質點繞行圓周所產生的量 $\vec{\mu} = \frac{iA}{c}$, 由於皆是圓周運動所產生的量, 因此, 一個又帶質量, 又帶電荷之質點, 其圓周運動的結果為 $\vec{L} \propto \vec{\mu}$!

仔細的推算: $A = \pi r^2$, $i = \frac{q}{T}$, $v = \frac{2\pi r}{T}$

$$\therefore \mu = \frac{iA}{c} = \frac{r}{2c}\frac{2\pi r}{T}q = \frac{1}{2c}rvq = \frac{q}{2mc}\underbrace{r\cdot mv}_{L}$$

$\therefore \vec{\mu} = \frac{e}{2mc}\vec{L}$, 由於 $[L] = \hbar$, $\therefore$ 常寫為 $\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc}\frac{\vec{L}}{\hbar}$

一般記 $\frac{e\hbar}{2m_e c} = \mu_b \equiv$ Bohr magneton $= 9.27\times10^{-24}$ amp-m² (joule/tesla)

∴ $\boxed{\vec{\mu} = g_L \mu_b \frac{\vec{L}}{\hbar}}$　$g_L = 1$，但在一般的情形，不一定為一

稱為 gyromagnetic ratio！

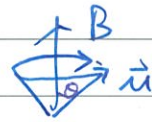
注意：由於 $\vec{\mu} \propto \vec{L}$ 的關係，使得 electric dipole，$\vec{p}$

在 $\vec{E}$ 下之行為與 $\vec{\mu}$ 在 $\vec{B}$ 下之行為不同：

二者皆受力矩 $\vec{\tau}_E = \vec{p}\times\vec{E}$　$\vec{\tau}_B = \vec{\mu}\times\vec{B}$

但∵ $\vec{\tau}_B = \frac{d\vec{L}}{dt}$，$\vec{\mu} = \gamma\vec{L}$ $(\gamma = \frac{e}{2mc})$，因此，$\vec{\mu}$ 會作所謂的

precession



∵ $\frac{d\vec{L}}{dt} = \gamma\vec{L}\times\vec{B}$，$|\Delta\vec{L}| = \gamma|\vec{L}\times\vec{B}|\Delta t$

$L_\perp$, $\Delta\theta$

$= L_\perp \underbrace{\omega_L \Delta t}_{\Delta\theta}$

$L_\perp$ 為 L 垂直 B 之投影
$L_\perp = L\sin\theta$
∵ $|\vec{L}\times\vec{B}| = BL\sin\theta = L_\perp B$
∴ $\omega_L = \gamma B \equiv$ Larmor frequency

H_1 破壞了旋轉對稱（∵ $\vec{B}$ 選了一個方向）

∴ 不同的 L_z（不同的 m）有不同之能量：

$$\hat{H}_1 \psi_{n,\ell,m} = \frac{|e|}{2m_e c} B L_z \psi_{n,\ell,m}$$

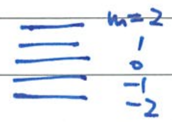
$$= \frac{|e|}{2m_e c} B m\hbar\, \psi_{n,\ell,m}$$

$$= m(\hbar\omega_L)\psi_{n,\ell,m} \qquad \omega_L = \frac{|e|B}{2m_e c}$$

因此，H_1 會將原先 $-\ell \le m \le \ell$（皆為 $\frac{-13.6}{n^2}$ eV）之能量

分開（split, Zeeman splitting）：　例　$(\ell=2)$

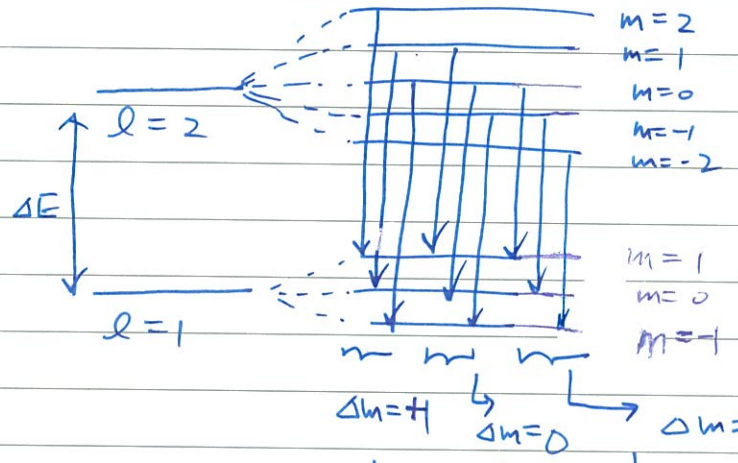
$$E = -\frac{1}{2}\mu c^2\left(\frac{Z\alpha}{n}\right)^2 + \hbar\omega_L m \longrightarrow$$



這個分裂(造成了)在光譜 normal Zeeman effect:

例 $\Delta m = \pm 1, 0$ (transition 之 selection rule, will be discussed later)

$\Delta m = m_i - m_f$



$\Delta E + \frac{|e|B}{2m_e c}$ $\quad \Delta E \quad$ $\Delta E - \frac{|e|B}{2m_e c}$

∴由原先之一條 $\longrightarrow$ ||| 三條光譜線

Splitting 之大小(能量): $\hbar\omega_L = \frac{eB\hbar}{2m_e c}$

$$= \frac{e\hbar}{2m_e c} \frac{B}{e/a_0^2} \frac{e}{a_0^2} \qquad a_0 = \frac{\hbar}{m_e c\alpha}$$

$$= \frac{e^2\hbar}{2m_e c}\left(\frac{m_e c\alpha}{\hbar}\right)^2 B/e/a_0^2 \qquad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2\right)}_{13.6\,eV} \underset{\uparrow\ \frac{1}{137}}{\alpha}\ B/e/a_0^2 = 13.6\,eV \frac{B}{2.6\times10^9 (\text{gauss})}$$

$$e/a_0^2 = 4.8\times10^{-10}/(0.5\times10^{-8})^2$$

∴ $B = 1T$

$\hbar\omega_L \sim \frac{13.6}{2.6\times10^5} eV \sim 10^{-4} eV$

∴ $10T \sim 1meV$

H_2之作用:

对於束縛在孤立的原子之电子而言, H_2之作用為 confinement.
(或 quantum dot)

不过一般B之大小, H_2之效果很小:

$$\langle x^2+y^2\rangle \sim a_0^2$$

$$\therefore \frac{H_2}{H_1} \sim \frac{\frac{e^2B^2}{8mc^2}a_0^2}{\frac{e}{2mc}B\hbar} \simeq \frac{1}{4}\,\frac{e^2}{\hbar c}\,\frac{B}{e/a_0^2}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{137}\,\frac{B}{(4.8\times10^{-10})/(0.5\times10^{-8})^2}$$

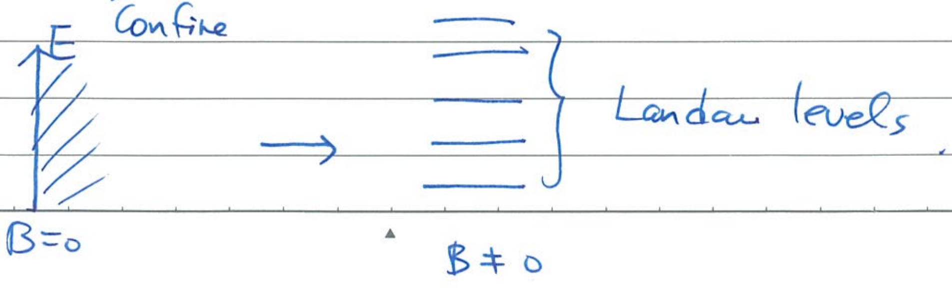
$$\sim \frac{B}{10^{10}\ \text{Gauss}} \ll 1$$

for ordinary B fields in the lab!

(Neutron Star: $B = 10^{12}$ Gauss on the surface,
則那時不可忽略 H_2)

Landau levels

當电子不再束縛於某一個原子時, H_2不可再被忽略, 事實H_2之confine效果使电子之能量量子化 ⇒ Landau levels



大致的物理圖像：

古典： $B \neq 0$，得到 confine 在一個圓上：

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e v B}{c}$$

$v = r\omega$

$$\therefore \omega = \frac{eB}{mc} = \text{cyclotron frequency}$$

量子： 類似的 confinement

$E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ ， $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Landau levels.

這是了解 Quantum Hall effect 之重要基礎

(請參考課本 226 – 229 頁) We will come back later

改變波函數之相位 (以上的討論 ⇒ 只探討能譜) 以下探討對 wavefunction 之影響

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \frac{|e|}{c}\vec{A}\right)^2\psi + V(r)\psi = E\psi \quad \text{—— (A)}$$

之解 ψ

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)^2\psi_0 + V(r)\psi_0 = E\psi_0 \quad \text{—— (B)}$$

之解 ψ_0 有以下形式上 (formally) 的關係

$$\psi(r) = e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}f(\vec{r})}\psi_0(\vec{r}) \quad \text{—— (C)}$$

$$f(r) = \int_p^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}')\cdot d\vec{r}'$$

* quantum case

Landau quantization & filling fraction

$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$, 取 $\vec{A}_L = (0, Bx, 0)$ (Landau gauge)

$$\nabla\times\vec{A}_L = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & Bx & 0 \end{vmatrix} = B\hat{z} \quad \text{is satisfied.}$$

此與 symmetry gauge $\vec{A}_S = \left(\frac{-yB}{2}, \frac{xB}{2}, 0\right)$ 之差別為

$$\vec{A}_S - \vec{A}_L = -\left(\frac{yB}{2}, \frac{xB}{2}, 0\right)$$

$$= -\nabla\left(\frac{xyB}{2}\right)$$

$$\psi_S = \psi_L\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{exyB}{2c}}$$

但对於長方形或方形 sample 而言，Landau gauge 是較佳的選擇

此時 $\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$

$$= \frac{1}{2m}\left(\hat{p} + \frac{|e|}{c}\vec{A}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2 + \left(\hat{p}_y + \frac{B|e|}{c}x\right)^2 + \hat{p}_z^2\right]$$

由於 $\hat{P}_y$ 與 $\hat{x}$ 可交換

$$\therefore \hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2 + 2\frac{|e|B}{c}\hat{x}\hat{P}_y + \left(\frac{|e|B}{c}\right)^2 x^2\right]$$

顯然 因 $[\hat{H}, \hat{P}_y] = 0$, $[\hat{H}, \hat{P}_z] = 0$

$\therefore$ $\hat{H}$, $\hat{P}_y$ & $\hat{P}_z$ can be diagonalized simultaneously.

对 2D 而言，沒有 $\hat{P}_z$

$$故 \ \psi_E(x, y) = e^{iky}\,v(x)$$

$$\hat{H}\psi_E = E\psi_E$$

$$\Rightarrow \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2m}\left(\hbar k + \frac{|e|B}{c}x\right)^2\right] v(x) = E\,v(x)$$

$$\left\{\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{|e|B}{c}\right)^2}_{\frac{1}{2}m\omega_c^2}\left(x + \frac{c\hbar k}{|e|B}\right)^2\right\} v(x) = E\,v(x)$$

即 $v(x)$ 為滿足一個諧運動之能量 eigenstate

其中振盪頻率即為 $\omega_c = \frac{|e|B}{mc}$

$$\therefore E = \hbar\omega_c\left(n + \tfrac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

此即 <u>Landau quantization</u>.

Check:

$$\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}+\frac{|e|}{c}\vec{A}\right) e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}f(\vec{r})}\psi_0(\vec{r})$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}f(\vec{r})}\right)}_{=\boxed{\frac{\hbar}{i}\,\frac{-i|e|}{\hbar c}\vec{\nabla}f(\vec{r})}\,e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}f(\vec{r})}\psi_0(\vec{r})}\psi_0(\vec{r})+\frac{\hbar}{i}e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}f(\vec{r})}\vec{\nabla}\psi_0(\vec{r}) + \boxed{\frac{|e|}{c}\vec{A}}\,e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}f(\vec{r})}\psi_0(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla}f(\vec{r})=\vec{A}(\vec{r})$$

$$\therefore = e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}f(\vec{r})}\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi_0(\vec{r})$$

所以，每一次 $\vec{\nabla}$ 與 $e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}f(\vec{r})}$ 交換一次，即產生一個 $-\frac{|e|}{c}\vec{A}$

即 $\left[\vec{\nabla}, e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}f(\vec{r})}\right] = -\frac{|e|}{c}\vec{A}$

∴當 $e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}f(\vec{r})}$ 由右向左移時：

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}+\frac{|e|}{c}\vec{A}\right)^2\psi_0 e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}f(\vec{r})}$$

$$=\frac{1}{2m}e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}f(\vec{r})}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)^2\psi_0$$

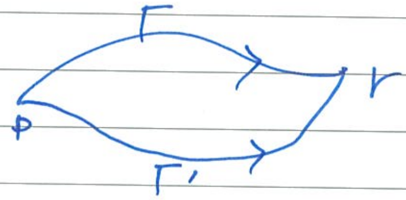
因 (A)式，經過代入 $\psi=\psi_0 e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}f(\vec{r})}$，確實得到

$$\cancel{e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}f(\vec{r})}}\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)^2\psi_0+U\psi_0\right]=E\,\cancel{e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}f(\vec{r})}}\psi_0$$

故 ψ 為 (A) 之解！

不过，Ⓒ式 卻有一個問題：

若 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\neq 0$，則 $\int_{p}^{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r}')\cdot d\vec{r}'$ 與路徑有關！



$$-\int_{p\,\Gamma}^{\vec{r}}+\int_{p\,\Gamma'}^{\vec{r}}=\oint\vec{A}\cdot d\vec{r}'=\int\vec{B}\cdot d\vec{a}\neq 0$$

這使得 $\vec{B}\neq 0$ 時，Ⓒ之 $\psi(\vec{r})$ 並不是 single-valued！（單值函數）

除非，由 Γ 及 Γ' 上算出之 $\psi(\vec{r})$ 一樣：

$$e^{i\frac{|e|}{\hbar c}\int_{p\,\Gamma}^{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r}')\cdot d\vec{r}'}=e^{i\frac{|e|}{\hbar c}\int_{p\,\Gamma'}^{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r}')\cdot d\vec{r}'}\quad\text{—— Ⓓ}$$

$$\therefore\ \frac{|e|}{\hbar c}\underbrace{\oint\vec{A}\cdot d\vec{r}'}_{\int\vec{B}\cdot d\vec{a}\,=\,\Phi\ (\text{flux})}=2\pi\cdot n$$

假設 $(\psi_0(\theta+2\pi)=\psi_0(\theta))$

$$\therefore\ \Phi=\underbrace{\frac{2\pi\hbar c}{|e|}}_{\frac{hc}{e}}n\ ,\quad n=0,1,2,\ldots$$

$\frac{hc}{e}=4.14\times10^{-7}$ Gauss$-cm^2$ $=\frac{6.625\times10^{-27}\times3\times10^{10}}{4.8\times10^{-10}}$

這就是所謂的 flux quantization：

① 若电子所在之空間為一般所謂單連通（沒有洞）之空間，Γ, Γ' 可以任意選，且外加磁場是任意的。

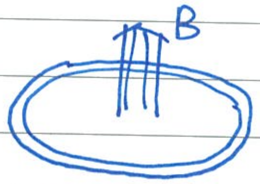
這時, $\Psi(\vec{r})$ 無法達到 single value 之要求

(∵ ① 無法滿足)

∴ ⓒ 不是正確的表示!

② 電子在一個非單連通(如一個環)中運動,

若環中有磁場, 則 $\boxed{\text{single-value}}$ 之要求



強烈的限制所包含之 flux 為 quantized:

$$\frac{2\pi\hbar c}{|e|}n$$

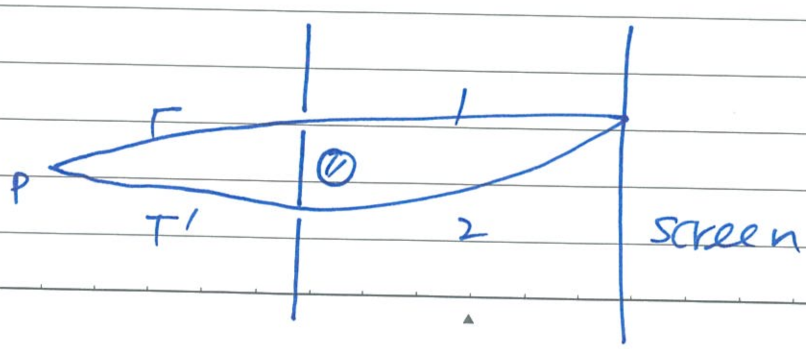
事實上, 這在1961已由超導所作之環得到驗証,

只是 do 時 $|e| \to 2|e|$. (說明)

之差必須 $2\pi n$ 才能成為駐波

Aharanov & Bohm effect (以上所談為能量之 eigenstate, 若考慮波的動態傳播, 則為以下的情形)

如果, 我們讓 Γ 及 Γ' 互相疊加 ⇒ 則可以看到干涉的現象, 這就是所謂的 AB effect. 其典型之 set up 是利用楊氏干涉實驗:



此時, 在 screen 上之 $\psi = \psi_1 + \psi_2$

而 $\psi_1 = \psi_1^0 \, e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}\int_1 d\vec{r}\cdot\vec{A}}$

$\psi_2 = \psi_2^0 \, e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}\int_2 d\vec{r}\cdot\vec{A}}$

$\vec{A}=0$ 時, 為一般的双狹縫干涉, 此時 $\psi_1^0 = a\, e^{i\delta_1^0}$

$\psi_2^0 = a\, e^{i\delta_2^0}$

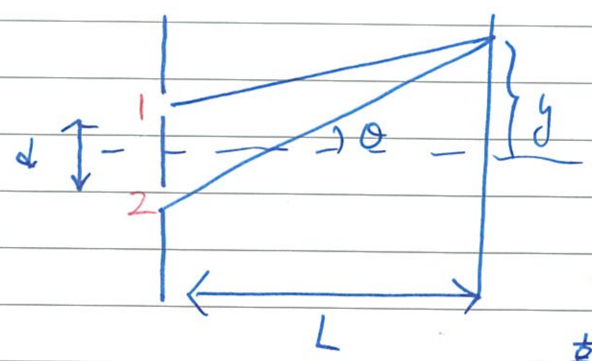
因此, flux 改變了相位:

$$\delta_1 = \delta_1^0 - \frac{|e|}{\hbar c}\int_1 d\vec{r}\cdot\vec{A}$$

$$\delta_2 = \delta_2^0 - \frac{|e|}{\hbar c}\int_2 d\vec{r}\cdot\vec{A}$$

相位差 $\delta_2 - \delta_1 = \delta_2^0 - \delta_1^0 - \frac{|e|}{\hbar c}\underbrace{\left(\int_2 d\vec{r}\cdot\vec{A} - \int_1 d\vec{r}\cdot\vec{A}\right)}_{=\oint d\vec{r}\cdot\vec{A} = \int \vec{B}\cdot d\vec{a} = \Phi}$

$\therefore$ 相位差 $= \delta_2^0 - \delta_1^0 - \frac{|e|\Phi}{\hbar c}$



而 $\delta_2^0 - \delta_1^0 = \frac{d\sin\theta}{\lambda}2\pi \simeq +\frac{2\pi}{\lambda}\frac{dy}{L}$

$\therefore$ 相位差 $= +\frac{2\pi}{\lambda}\frac{dy}{L} - \frac{|e|\Phi}{\hbar c}$

或路程差 $= +\frac{dy}{L} - \frac{|e|\Phi}{\hbar c}\frac{\lambda}{2\pi}$

$\therefore$ 亮紋: $+n\lambda = +\frac{dy_n}{L} - \frac{|e|\Phi}{\hbar c}\frac{\lambda}{2\pi}$

$y_n = \frac{L}{d}n\lambda + \frac{L|e|\Phi}{d\,\hbar c}$, $n=0$ 為中央亮紋

$\therefore \Phi>0$, 中央亮紋上移 $\frac{L}{d}\frac{\Phi}{\Phi_0}\lambda$ (R.G. Chambers, PRL 5, 3 1960)

圖 13-1 為一個典型之 AB expt 的 setup!

習題

鐵圈 $B=0$ 時

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi$$

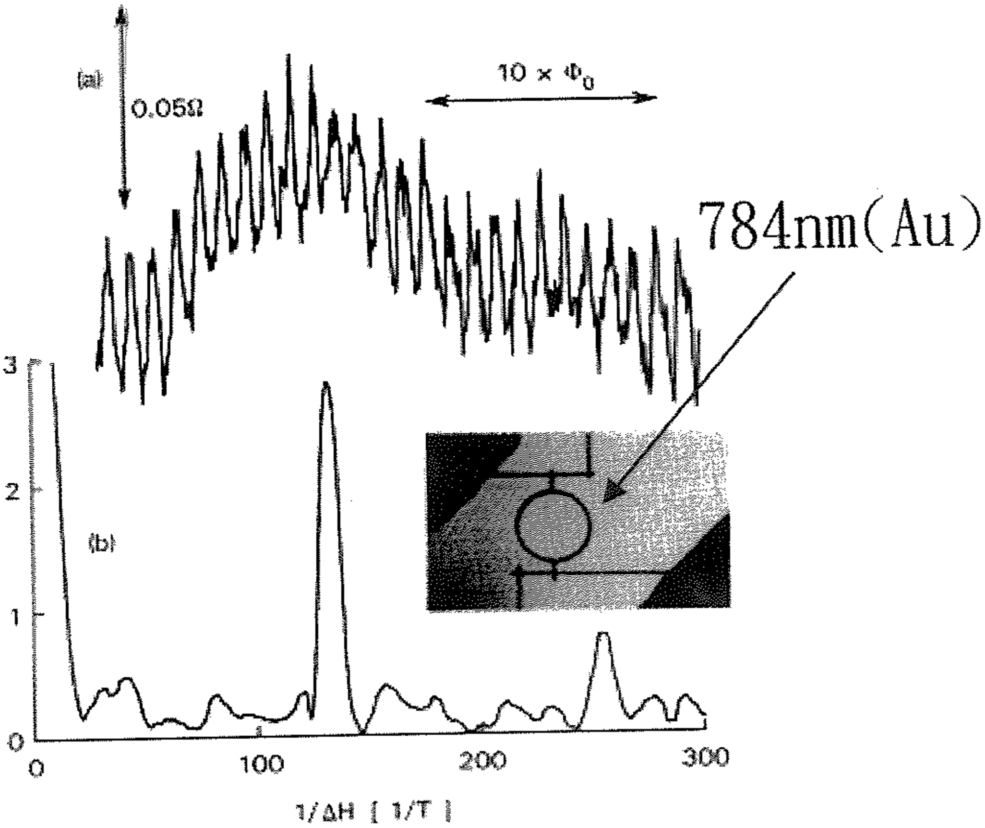
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

R 固定時

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 = \frac{-\hbar^2}{2mR^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} = \frac{L_z^2}{2I} \qquad L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

由為之前所寫下之 $\hat{H}$ 形式, $E_n = \dfrac{\hbar^2 n^2}{2mR^2}$

若 $B \neq 0$, 則 $E_n = ?$ eigenfunction $= ?$



Phys. Rev. Lett. 54, 2696,

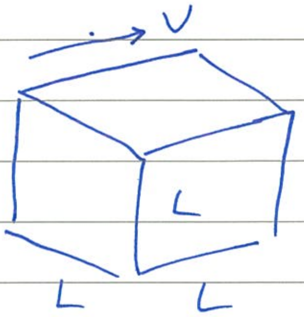
相位=kx-ωt

若金屬環中有隨時變
的雜質，振盪會消失

Fig13-1

量子霍爾效應簡介
(Simplied version)

* 2D 的特殊性



$$V = IR$$

$$\begin{cases} I = jL^{d-1} \\ j = \rho E \\ V = EL \end{cases}$$

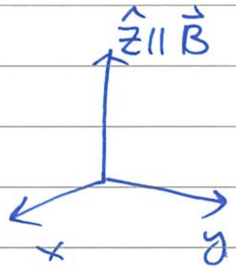
$$\therefore\ EL = \rho E L^{d-1} R$$

$$\therefore\ R = \rho L^{2-d}$$

∴ 當 $d=2$ 時 $[R]=[\rho]$ 與 scale (L) 無關

為一個與 sample 內在特性有關的量

* 古典霍爾效應



Due to the Lorentz force:

$$\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\frac{-\vec{p}}{\tau}}_{\text{due to collision}} + \vec{F}_L \quad , \ \tau = \text{平均碰撞時間}$$

在 Stationary 時, $\left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle = 0$

$$\vec{p} = \tau \vec{F}_L \quad \therefore\ \vec{j} = -ne\vec{v}$$

$$\therefore\ \vec{j} = -\frac{ne}{m}\vec{p} = \frac{-ne\tau}{m}\left[-e\vec{E} + \frac{-e}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{ne^2\tau}{m}}_{\sigma_0}\left[\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right]$$

$$= \sigma_0\vec{E} - \sigma_0\frac{1}{nec}\vec{j}\times\vec{B}$$

因此 若 $\vec{B} = B\hat{z}$

$$j_x = \sigma_0 E_x - \frac{\sigma_0 B}{nec} j_y$$

$$j_y = \sigma_0 E_y + \frac{\sigma_0 B}{nec} j_x$$

$$\therefore \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_0} & \frac{B}{nec} \\ -\frac{B}{nec} & \frac{1}{\sigma_0} \end{pmatrix}}_{\rho\ (\text{resistivity})} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} \quad —\ ①$$

或 $$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \rho^{-1}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sigma_0}\right)^2 + \left(\frac{B}{nec}\right)^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_0} & -\frac{B}{nec} \\ \frac{B}{nec} & \frac{1}{\sigma_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{B\sigma_0}{nec}\right)^2}\begin{pmatrix} \sigma_0 & -\frac{B}{nec}\sigma_0^2 \\ \frac{B}{nec}\sigma_0^2 & \sigma_0 \end{pmatrix}}_{\sigma}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

σ , σ_{xy} = Hall conductivity ②

Clearly, $\tau \to \infty$.

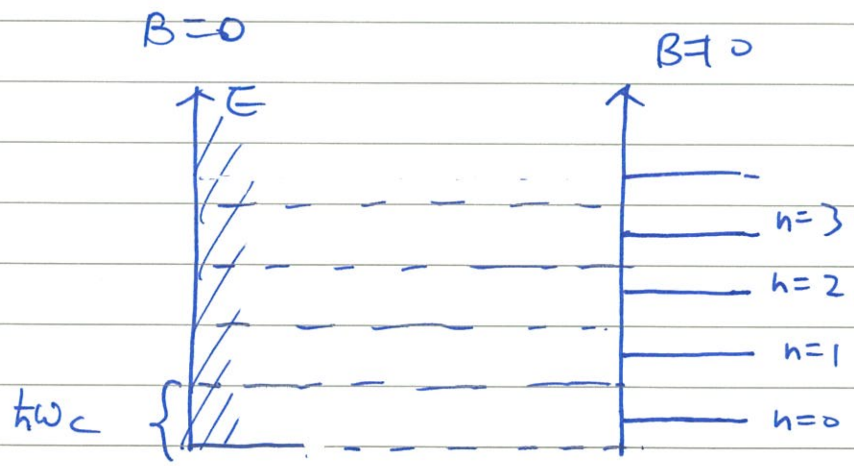
①式 $\rho_{xx} = 0.$ $\rho_{xy} = \dfrac{B}{nec}$ —③

(注意 ②式 $\Rightarrow \sigma_{xx} = 0$ too!)

$$\sigma_{xy} = \frac{nec}{B}.$$

③式 $\Rightarrow$ ρ_{xy} 由 B 和 n 決定.

量子: convenient to introduce the notion of filling fraction ν 如下:



∵ 原先在 $\Delta E = \hbar\omega_c$ 之狀態 $\Rightarrow$ collapse 成一個 Landau level

因此, 每一個 Landau level 有很大的 degeneracy!

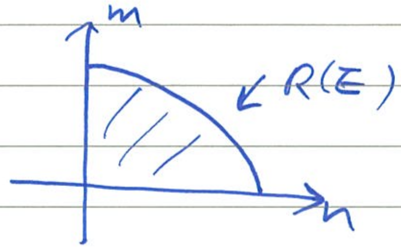
Landau's level 的 degeneracy：

首先，二維的 density of state $g(E)$

$$= \frac{\#\text{of states in } (E, E+dE)}{L^2 \cdot dE}$$

不計自旋，在 $(0,E)$ 之間的狀態數為：

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}\underbrace{(n^2+m^2)}_{R^2}$$



狀態數 $= \frac{\pi}{4}R^2(E) = \frac{\pi}{4}\frac{2m}{\hbar^2}\frac{L^2}{\pi^2}E$

$$\therefore g(E) = \frac{\frac{\pi}{4}\frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \cdot dE}{L^2 \cdot dE} = \frac{m}{2\pi\hbar^2} = \text{常數}$$

∴ 一個 Landau level 可以裝

$g(E)\times L^2 \times \hbar\omega_c$ 個電子

$$\therefore \text{degeneracy} = \frac{m}{2\pi\hbar^2}\times L^2 \times \hbar \times \frac{|e|B}{mc} = \frac{1}{2\pi\hbar}\frac{|e|B}{c}L^2$$

$$= \frac{L^2}{2\pi\, l_B^2} \qquad l_B^2 = \frac{\hbar c}{|e|B} = \text{magnetic length}$$

$$l_B = \frac{25.6\,nm}{\sqrt{B(\text{Tesla})}}$$

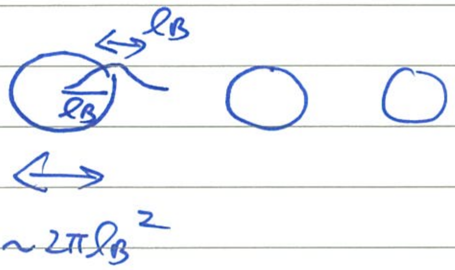
物理圖相： $l_B \sim$ "量子圓周運動" 之半徑

$$m\frac{v^2}{l_B} \sim \frac{1}{c} e v B$$

$$\therefore \ l_B \sim \frac{mc}{eB} v = \frac{c}{eB}\frac{h}{\lambda} \sim \frac{c}{eB}\frac{h}{l_B}$$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\therefore \ l_B^2 \sim \frac{\hbar c}{eB}.$$



$$\frac{L^2}{2\pi l_B^2} \sim \# \text{ of } \bigcirc \text{ in } L^2 \,!$$

∴每一 Landau level，單位面積

可裝 $n_B = \frac{1}{2\pi l_B^2}$ 個電子

若電子密度 $= n$，則 $\nu = \frac{n}{n_B}$ = filling fraction
(個數/面積)

如 $\nu=1$ 表示 $n=0$ Landau level 被填滿

$\nu=1/2$ 〃 〃 〃 〃 半 〃 〃

$\nu=1/3$ 〃 〃 〃 〃 $\frac{1}{3}$ 〃 〃

注意：以上之所以不考慮自旋，這是因為在強磁場下自旋向上及向下不再有相同能量，故对同一能量而言，不需計算 ↑+↓！

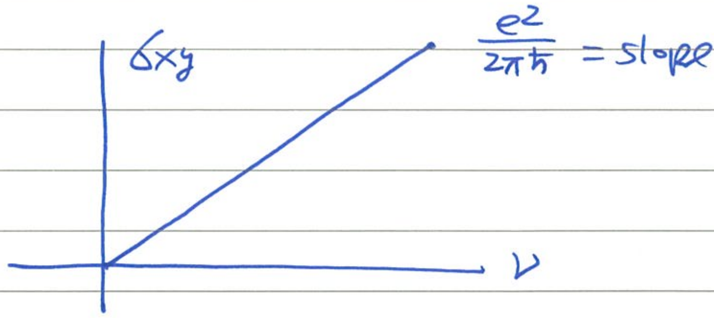
$$\because \quad \nu = \frac{n}{n_B} = \frac{2\pi\hbar c n}{|e| B}$$

$$\therefore \quad \sigma_{xy} = \frac{nec}{B} = \cancel{n}ec \cdot \frac{\nu e}{2\pi\hbar c \cancel{n}} = \nu \frac{e^2}{2\pi\hbar}$$

$$\therefore \quad R_{xx} = 0, \qquad R_{xy} = \rho_{xy} = \frac{B}{nec} = \frac{R_Q}{\nu}$$

$$R_Q = \frac{2\pi\hbar}{e^2} = \frac{h}{e^2} = \text{quantum resistance}$$

$\sigma_{xy} \propto \nu$



只与 ν 有關！（即不同 B，或 n 只要 ν 一樣 σ_{xy} 一樣）

$\rightarrow \omega_c\tau \rightarrow \infty$.

與古典相反，在高磁場，低溫下，我們發現 → Nobel 1985

(1980, Von Klitzing, Dorda and Pepper) PRL, 45, 494 (1980)

$\nu =$ 整數時，$R_{xx} = 0$

而 R_{xy} 為一平台（如上圖）

即 $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -ie^2/h \\ ie^2/h & 0 \end{pmatrix}$ $i =$ integers $= 1, 2, 3, \ldots$

（見②*式），σ_{xy} is quantized

此為所謂的整數量子霍爾效應（IQHE）

（$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$ 但仍有 j_x！）

在 1982 年，更進一步由 D. Tsui, Störmer & Gossard

發現分數量子霍爾效應 即 $\nu = \frac{n}{m}$ $m =$ odd, $n =$ integer

（FQHE）

也有平台！ $R_H = \frac{1}{\nu}\boxed{\frac{h}{e^2}} = 25812.807\,\Omega$

這就是量子霍爾效應的實驗結果。

實驗上，要非常乾淨的系統才能見到 FQHE.

Simple-minded explanation for IQHE : 當 Landau level 被填滿時

$R_{xx} = 0$ ∵ 電子不能被散射！

此時 $n = n_B \times$ integer

∴ $\nu =$ integer.

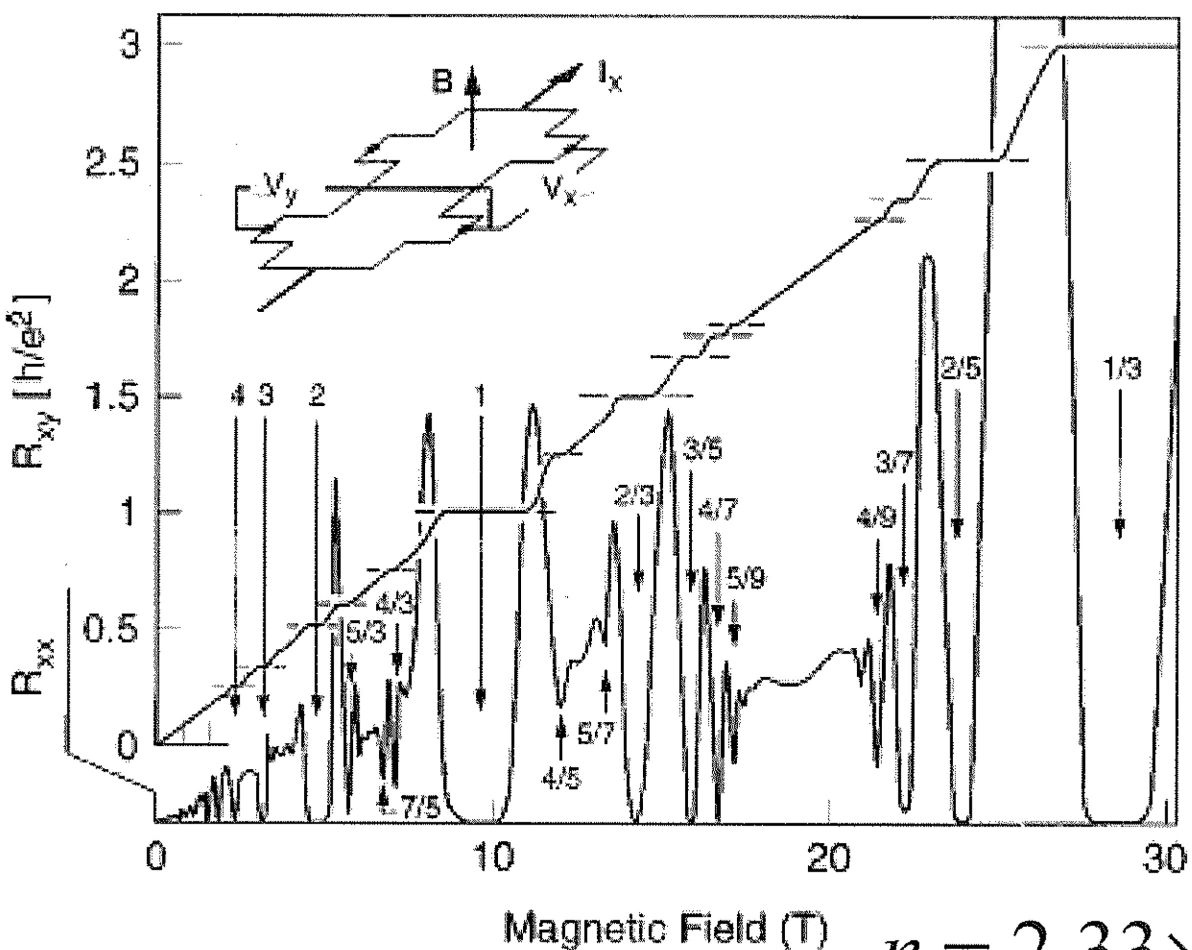
故 $\sigma_{xy} =$ integer $\frac{e^2}{h}$!

一定要考慮 impurity 及 e-e 作用

比較精確的論証：見 Kittel's introduction to solid state physics

及一些 Quantum Hall effects 的書籍！

Quantum Hall effects



$$n = 2.33\times10^{11}\,cm^{2}$$

Stormer, Tsuei, and Gossard,
Review of Modern physics 71, S298 (1999)