Chapter 15. 量子角動量之加法

由上述章節，可知粒子不僅具有 orbital angular momentum $\vec{L}$ 也有 spin $\vec{S}$，因此，其總角動量 $\vec{J}=\vec{S}+\vec{L}$，因此，我們必須知道如何加角動量！

事實上，除了一個粒子，需考慮 $\vec{S}$ 和 $\vec{L}$ 相加的問題，多粒子系統（或 composite particles）也有此需要，

此時 $\vec{J}=\sum_i \vec{J}_i$ $\quad\vec{J}_i$ 為 ith particle 的總角動量.

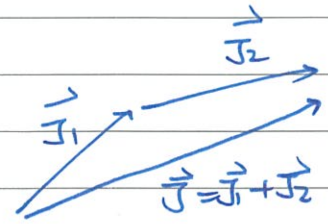
$$=\sum_i \vec{S}_i+\sum_i \vec{L}_i \equiv \vec{S}+\vec{L}$$

角動量之相加性 (additive) 可以追溯到力的（力矩）相加性。

為了簡化討論，我們只討論二個角動量之相加，三個或三個以上之角動量相加可視為兩兩相加後，再相加，即可處理.

<u>$\vec{J}_1+\vec{J}_2$</u>：

古典角動量相加 = 向量相加



何謂量子角動量相加？

顯然了，它包括

(i) 求出相加後角動量所允許的值

(ii) 求出，相加後，新的 eigenstate (wave function)

更精確的陳述為：

相加前

$$\left.\begin{aligned} \hat{J}_1^2 \phi^{(1)}_{j_1 m_1} &= \hbar^2 j_1(j_1+1)\phi^{(1)}_{j_1 m_1} \\ \hat{J}_{1z}\phi^{(1)}_{j_1 m_1} &= m_1\hbar\,\phi^{(1)}_{j_1 m_1} \end{aligned}\right\} -j_1 \le m_1 \le j_1$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{J}_2^2 \phi^{(2)}_{j_2 m_2} &= \hbar^2 j_2(j_2+1)\phi^{(2)}_{j_2 m_2} \\ \hat{J}_{2z}\phi^{(2)}_{j_2 m_2} &= m_2\hbar\,\phi^{(2)}_{j_2 m_2} \end{aligned}\right\} -j_2 \le m_2 \le j_2$$

(取同一 quantization axis)

相加後 $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$

$$\hat{J}^2 \psi_{jm} = \hbar^2 j(j+1)\psi_{jm}$$

$$\hat{J}_z \psi_{jm} = \hbar m\, \psi_{jm}$$

$-j \le m \le j$， j, m 與 (j_1, m_1) 及 $(j_2 m_2)$ 之關係？ ①

$\psi_{jm} = \sum A_{j_1 m_1, j_2 m_2}\, \phi^{(1)}_{j_1 m_1}\phi^{(2)}_{j_2 m_2}$， $A_{j_1 m_1, j_2 m_2} = ?$ ②

Clebsch-Gordon Coefficients

本章節，我們以①為討論重點，②部分則只以 spin 為例。

lemma: 允許的 (j, m) 值由 commutation relation

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \quad [J_\alpha, J_\beta] = i\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma .$$

決定

回顧以前推導 $-l \le m \le l$ 的过程，我們發現只需用到以上的 commutation relations.

進而，由 J_x, J_y 形成 $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i \hat{J}_y$,

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 = J_+ J_- + J_z^2 - \hbar J_z \quad \text{仍成立}$$
$$= J_- J_+ + J_z^2 + \hbar J_z$$

(eqs 11-27 及 28)

$$\therefore \langle J^2 - J_z^2 + \hbar J_z \rangle = \langle J_+ J_- \rangle \ge 0$$
$$\langle J^2 - J_z^2 - \hbar J_z \rangle = \langle J_- J_+ \rangle \ge 0$$

$$\therefore \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 + \hbar m \ge 0, \quad j(j+1) \ge m^2 - m$$
$$\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 - \hbar m \ge 0, \quad j(j+1) \ge m^2 + m$$

$(m+j)(m-j+1) \le 0$
$(m-j)(m+j+1) \le 0$

$$\Rightarrow \quad -j \le m \le j, \quad m = -j, \underset{J_+}{\overset{J_-}{\rightleftarrows}} -j+1, \underset{J_+}{\overset{J_-}{\rightleftarrows}} -j+2, \cdots, j-1, \underset{J_+}{\overset{J_-}{\rightleftarrows}} j$$

例: $\vec{L}$, $\quad -l \le m \le l$

$\vec{S}$, $\quad -1/2 \le m \le 1/2$, $\quad \therefore m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \Rightarrow \downarrow$ 及 $\uparrow$

注意，一旦 $\vec{J}_1, \vec{J}_2$ 滿足 $[J_{1\alpha}, J_{1\beta}] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_{1\gamma}$

$$[J_{2\alpha}, J_{2\beta}] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_{2\gamma}$$

則 $\vec{J}=\vec{J}_1+\vec{J}_2$ 也滿足：(前提是 $[\vec{J}_1,\vec{J}_2]=0$!)

$$J_\alpha = J_{1\alpha}+J_{2\alpha}\ ,\quad [J_\alpha, J_\beta] = [J_{1\alpha}+J_{2\alpha}, J_{1\beta}+J_{2\beta}]$$

$$= [J_{1\alpha}, J_{1\beta}] + \underbrace{[J_{1\alpha}, J_{2\beta}]}_{0} + \underbrace{[J_{2\alpha}, J_{1\beta}]}_{0} + [J_{2\alpha}, J_{2\beta}]$$

$$= i\hbar\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_{1\gamma} + i\hbar\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_{2\gamma}$$

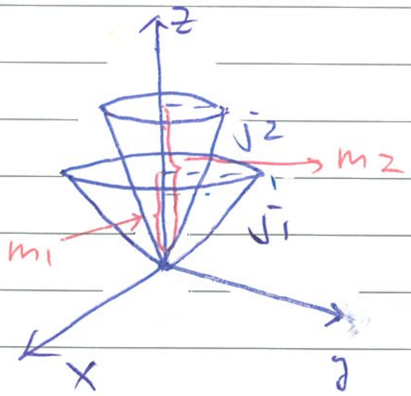
$$= i\hbar\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma$$

因此 $-j \le m \le j$, $m=-j, -j+1, \dots, j-1, j$ 仍成立！

問題是 j 與 j_1 及 j_2 之關係如何？

古典：$\big||\vec{J}_1|-|\vec{J}_2|\big| \le |\vec{J}| \le |\vec{J}_1|+|\vec{J}_2|$ —(3)

量子：



$J_z = J_{1z}+J_{2z}$, $m\hbar = (m_1+m_2)\hbar$

$\therefore\ m = m_1+m_2$

$\because\ -j_1 \le m_1 \le j_1$

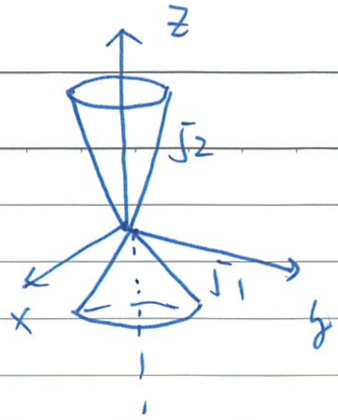
$-j_2 \le m_2 \le j_2$

$\therefore\ -(j_1+j_2) \le m \le j_1+j_2$

顯然的，j 的上限為 j_1+j_2，否則若 j 可以比 j_1+j_2 大，則 m 可以超過 j_1+j_2！因此 $j \le j_1+j_2$

Paper House

若我們將上圖改畫成



則似乎建議下限為 $|j_1-j_2|$！

因此，③式到了量子處理後：$|j_1-j_2|\le j\le j_1+j_2$ —④

$j=|j_1-j_2|,\ |j_1-j_2|+1,\ \dots,\ j_1+j_2$

注意：④式與③式仍有不同處，因為③式若以 j 來表示

則為 $\left|\sqrt{j_1(j_1+1)}-\sqrt{j_2(j_2+1)}\right|\le\sqrt{j(j+1)}\le\sqrt{j_1(j_1+1)}+\sqrt{j_2(j_2+1)}$

(若 approximate $j(j+1)\simeq j^2\Rightarrow$ ③可得④式)

④式之証明超出本課程範圍，不過卻可以從 state counting

理解：

相加之前 $\phi^{(1)}_{j_1m_1}\phi^{(2)}_{j_2m_2}$ 有 $(2j_1+1)\times(2j_2+1)$ states

相加之後 $\underbrace{\psi_{jm}}=\sum_{m_1m_2}A_{jm_1,j_2m_2}\phi^{(1)}_{j_1m_1}\phi^{(2)}_{j_2m_2}$

basis 狀態個數也必須 $=(2j_1+1)(2j_2+1)$ —⑤

$j=j_1+j_2\Rightarrow m$ 的個數 $=2(j_1+j_2)+1$

⋮

$j=|j_1-j_2|\Rightarrow m\ \cdot\cdot\ =2(j_1-j_2)+1$

設 $j_1>j_2$ 則 $\underset{\text{總}}{m}$ 個數 $=\sum_{n=j_1-j_2}^{j_1+j_2}2n+1=\sum_{n=0}^{j_1+j_2}(2n+1)-\sum_{n=0}^{j_1-j_2-1}(2n+1)$

$\because \sum_{j=0}^{k}(2j+1) = 2\cdot\frac{k(k+1)}{2} + k+1$

$= (k+1)^2$

$\therefore$ m 的總個數 $= (j_1+j_2+1)^2 - (j_1-j_2)^2$

$= (2j_1+1)(2j_2+1)$ 与⑤式一致！

故 $|j_1-j_2| \le j \le (j_1+j_2)$, $j = |j_1-j_2|, |j_1-j_2|+1, \ldots, j_1+j_2$

二個自旋的相加：

此時，$\because s_1 = 1/2$, $s_2 = 1/2$

$\therefore$ total s 滿足 $0 \le s \le 1$，$\therefore s = 0$ 或 1

在相加之前，$\chi^{(1)} = \chi_+^{(1)} / \chi_-^{(1)}$ $\chi^{(2)} = \chi_+^{(2)} / \chi_-^{(2)}$

即 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 即 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

若以 $|\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$|\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 表示

則相加前，有 $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ $2\times2=4$ 種組合.

相加後，$S=1$ $m = 1, 0, -1$

$\because m = m_1 + m_2$，很明顯的，$m=1 \Rightarrow |\uparrow\uparrow\rangle$ $(\because \overset{m_1}{\frac{1}{2}} + \overset{m_2}{\frac{1}{2}} = 1)$

$m=-1$，$|\downarrow\downarrow\rangle$ $(\because \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1)$

其下，$m=0$，一定為 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 或 $|\downarrow\uparrow\rangle$ 及 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 与 $|\downarrow\uparrow\rangle$ 之組合.

同理，$S=0$，m一定$=0$，$\therefore |S=0, m=0\rangle$ 也是 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 與 $|\downarrow\uparrow\rangle$ 之組合

現在的問題是： $|S=1, m=1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$

$|S=1, m=-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$

$$\left\{\begin{array}{l} |S=1, m=0\rangle \\ |S=0, m=0\rangle \end{array}\right\} = ?$$

首先，$\because S_- |S=1, m=1\rangle = \hbar\sqrt{(S+m)(S-m+1)}\, |S=1, m=0\rangle$

$$\therefore |S=1, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} S_- |S=1, m=1\rangle$$

但 $S_- = S_{1-} + S_{2-}$ 且 $|S=1, m=1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$

$$S_{1-}|\underset{1}{\uparrow}\underset{2}{\uparrow}\rangle = \hbar\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1)}\,|\downarrow\uparrow\rangle = \hbar|\downarrow\uparrow\rangle$$

$$S_{2-}|\underset{1}{\uparrow}\underset{2}{\uparrow}\rangle = \hbar|\uparrow\downarrow\rangle$$

$$\therefore S_-|S=1, m=1\rangle = \hbar(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

因此，$|S=1, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$

而因為正交的要求： $|S=0, m=0\rangle$ 與 $|S=1, m=0\rangle$ 垂直

即 $\int d\vec{r}\, \phi^*_{S=0, m=0}\, \phi_{S=1, m=0} = 0$

$$\therefore |S=0, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$\left(\because \int d\vec{r}\, \phi^*_{\uparrow\downarrow}\, \phi_{\downarrow\uparrow} = 0 \quad , \int d\vec{r}\, \phi^*_{\downarrow\uparrow}\, \phi_{\uparrow\downarrow} = 0\right)$

∴總之, $|S=1, m=1\rangle = |\overset{1}{\uparrow}\overset{2}{\uparrow}\rangle \quad \chi_+^{(1)}\chi_+^{(2)}$

$|S=1, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)} + \chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)})$

$|S=1, m=-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \quad \chi_-^{(1)}\chi_-^{(2)}$

(spin) triplet

$|S=0, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)} - \chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)})$ (spin) singlet.

圖像見後

注意: triplet 在交換1與2下不變

$|S=1, m\rangle|_{1,2} = |S=1, m\rangle|_{2,1}$

而 singlet $|S=0, m=0\rangle|_{2,1} = -|S=0, m=0\rangle_{1,2}$

單一電子的總角動量

$\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$ 由於自旋與 $\vec{L}$ 並無關連

故 $[\vec{S}, \vec{L}] = 0$

$\vec{S}$ 作用在粒子 intrinsic 空間中

$\vec{L}$ 作用在 $\vec{r}$ 空間中

∴ $\vec{S}+\vec{L}$ 之問題與 $\vec{J}_1+\vec{J}_2$ 一樣

故 $l-1/2 \le j \le l+1/2$, 而 $j = l-1/2$ 或 $l+1/2$

二個電子的狀態:

首先, 二個電子是全同粒子, 因此, 其 波函数中

需是反对稱的！

事實上，$\Psi_{\sigma_1,\sigma_2}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \underbrace{\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i\vec{P}\cdot\vec{R}}{\hbar}}}_{\text{質心}} \cdot \underbrace{R_{n\ell m}(r)\, Y_{\ell,m}(\theta,\phi)}_{\substack{\text{相对運動 } \vec{r}_1-\vec{r}_2 \\ \text{以}(r,\theta,\phi)\text{表示}}} \cdot \underbrace{\chi_{1,2}}_{\text{自旋}}$

∴ 1与2交換時，質心部分 → 不變

$\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2 \to -\vec{r}$，即 parity transformation

$Y_{\ell m} \to (-1)^{\ell}\, Y_{\ell m}$ (見後面的討論)

$\chi_{1,2} \to \chi_{2,1}$

為了使 $\Psi_{\sigma_1,\sigma_2}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = -\Psi_{\sigma_2,\sigma_1}(\vec{r}_2,\vec{r}_1)$ 且 $\chi_{1,2}$ 之 S 固定

二種可能的組合：$S=1$，(triplet) 之 $\ell=$ odd

$S=0$ (singlet) 之 $\ell=$ even.

由 do. 再得 $\vec{J}=\vec{S}+\vec{L}$，spectroscopic notation，適用於任何 $\vec{S}+\vec{L}=\vec{J}$

$\Rightarrow {}^{2S+1}L_J$. 例：${}^1S_0$，$S=0$，$L=0$，$J=0$
${}^1F_3$　$S=0$，$L=3$　$J=3$

由於　$R(r) \sim r^{\ell}$

$\ell=0$ 時，二电子才能靠近，∴ $S=0$ (singlet)，电子比較靠近，反之，对 triplet 而言，ℓ 從 1 開始，所以相距較遠，這是 exchange force 的一個表現！

Intrinsic parity (page 263)

除了 spin 外，粒子也具有 intrinsic parity

orbital 部分：

parity transformation $\vec{r} \to -\vec{r}$

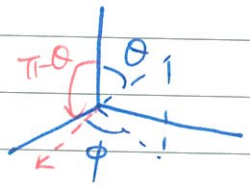
$\psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r})$ even

$\psi(\vec{r}) = -\psi(\vec{r})$ odd

例：Harmonic oscillator $\psi_n(-x) = (-1)^n \psi_n(x)$

Spherical harmonics. $Y_{lm}(\theta,\phi)$

$\vec{r} \to -\vec{r}$,



$(\theta,\phi) \to (\pi-\theta, \phi+\pi)$

而 $\underbrace{Y_{lm}(\pi-\theta, \phi+\pi)} = (-1)^l\, Y_{lm}(\theta,\phi)$

$$e^{im(\phi+\pi)} \underbrace{\frac{1}{(\sin\theta)^m} \frac{d^{l-m}}{du}}_{(-1)^m \cdot (-1)^{l-m} = (-1)^l \, !} (1-u^2)^l, \qquad u = \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$

$\therefore l = $ even, parity = even, $l = $ odd, parity = odd.

此為 orbital 部分，如上所述，除此之外，粒子具有 intrinsic parity.

而 Composite particle 之 parity = $\underset{\text{連乘積}}{\Pi}$ orbital 部分 × $\underset{\text{連乘積}}{\Pi}$ intrinsic 部分。

Paper House

(正如 phase 是相对的一样)

由於 ± 号是相对的 ∴ 一般定 proton, neutron, e^- ⇒
intrinsic parity = +

在粒子物理中 可以証明 Fermion 之反粒子
的 intrinsic parity 与 fermion 相反

∴ e^+ 之 parity = −

如此, 可以将其他粒子之 parity 定出!

Yukawa potential 中, 強作用之交換粒子. π^+, π^0, π^-

例: $\pi^- + d \to n + n$ (Capture of π^- by d)

π^- 之 spin = 0. π^- 相对 d 之 $l=0$ (lowest)

但 $d = np$ 之 angular moment = 1

∴ 反應前 $J=1$.

		S	L	J
反應後:	n 与 n ⇒ identical	0	even	不可能 =1

∴ $S=1$ (triplet), ∴ $l = 0, 1, 2$ 都有可能

(∵ S+L J: $1+0 \to 1$, S+L J: $1+1 \to 0, 1, 2$, S+L J: $1+2 \to 1, 2, 3$ 都包含 $J=1$)

$^3S_1$ $\quad$ $^3P_0, {}^3P_1, {}^3P_2$ $\quad$ $^3D_1, {}^3D_2, {}^3D_3$

∵ neutron ⇒ fermions, ∴ 只能 $l=1$, wavefunction 才是 antisymmetric!

∴ $n+n \Rightarrow {}^3P_1$ (J 才 = 1)

但 Parity of $n+n$ = $(-1)^l \, \Pi_n \cdot \Pi_n = (-1)^1 = -1$

$= \Pi_{\pi^-} \cdot \Pi_d$, 而 $\Pi_d = \Pi_n \Pi_p (-1)^0 = +1$ ∴ $\Pi_{\pi^-} = -1$!