IV. Principle of virtual work
(虛功原理)

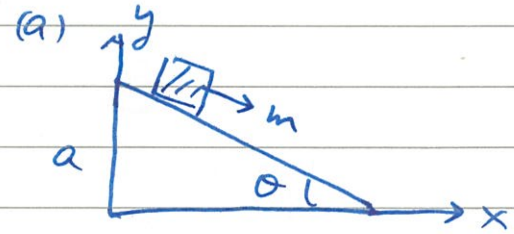
* Constraints and incompleteness of Newton's law

由牛頓運動定律 $m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i$ 可知，一定 $\vec{F}_i$ $(i=1,2,..N)$ 給定了，則共有 3N 個方程式 正好可以解 3N $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, .., \vec{r}_N)$ 個變數.

雖然，實際上，对巨觀的系統而言，N 很大，$N \sim 10^{23}$ 要解這麼多之方程式不可行，但原則上則可以寫得出來的！

以上是從微觀出發，到了巨觀，為了描述巨觀物体的運動，必須作一些假設，如剛体一即物体剛硬不變形狀等，因此有所謂的的 constraints (限制)，如

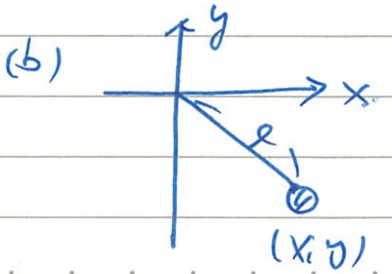
(a)



m 在斜面上運動
限制

$\therefore y - a = -\tan\theta\, x$

(b)



單擺，$x^2 + y^2 = \ell^2$

這些能以方程式（如 $y+\tan\theta x=a$，$x^2+y^2=l^2$）表示之 Contraints 稱為 holonomic。反之，為 non-holonomic，如限制在 $x>0$ 運動的球（破 牆）

$x>0$ 不是方程式，為 non-holonomic constraint.

我們的討論將以 holonomic 為主。一般而言，若可以有 m 個 Contraints，則若系統之座標為 $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N$，（$\vec{r}_i=(x_i,y_i,z_i)$）

則有 m 個方程式

$$g_1(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N,t)=0$$

$$g_2(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N,t)=0$$

$$\vdots$$

$$g_m(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N,t)=0 \quad \cdots \quad (1)$$

因此，$\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N$ 並不是完全独立之座標。

由於 Contraints 來自（一定）於某一些力所造成的，

我們將這些力稱為 $\vec{F}_i^{\,constraint}$，$i=1,2,\ldots N$

（作用在 $\vec{r}_i$，$i=1,2,\ldots N$ 上）

故 牛頓定律 成為

$$m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}=\vec{F}_i^{\,appl.}+\vec{F}_i^{\,Contraint} \quad \cdots \quad (2)$$

$$i=1,2,3,\ldots,N$$

∴現在共有 $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots\vec{r}_N$ 及 $\vec{F}_1^{\,Contraint},\ldots,\vec{F}_N^{\,Contraint}$ 6N 個未知數！

如果不計 $\vec{F}_i^{\,constraint}$，則有 3N 個變數

∴ 此時系統 自由度（= 自由獨立 之變數 的數目）

在 contraints 下

$= 3N - m \equiv f$

$\therefore m = 3N - f$

整合 ①–②，現在有 6N 個待解出之變數，

但只有 $3N + m$ 個方程式

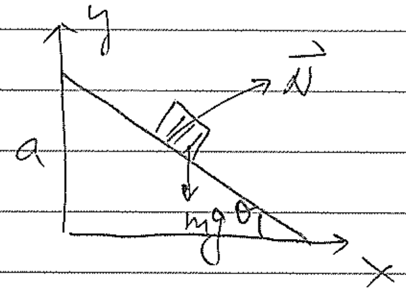
$\quad\quad\quad\; \| $

$\quad\quad 6N - f$

∴ 尚缺 f 個方程式！

這是將牛頓定律用在有限制時之不完備的地方！

例一，



以在光滑斜面上運動之木塊來說，

其合力有 mg 向下 以及

斜面給予的作用力 $\vec{N} = (N_x, N_y)$

$$\therefore \quad m a_x = N_x$$
$$m a_y = N_y - mg$$

再加上 constraint： $y - a = -\tan\theta\, x$

只有 3 個方程式，但未知有 x, y，及 N_x, N_y！

（此時未知 $= 2 \times 2N = 4N$，不是 6N）

虛功原理

* Principle of virtual work 及 D'Alambert's principle

以上例子告訴我們，在有限制 (holomic constraints) 的時候，

必須再額外提供一些方程式，牛頓力學才完備。

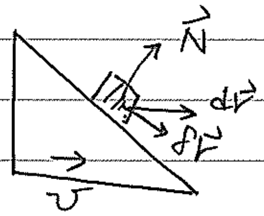
這些額外提供的方程式正是由所謂的

虛功原理來決定。

如果仔細觀察以上的例子，可以發現，$\vec{F}^{constraint}$

與滿足 constraint 之位移 $\delta\vec{r}$ 垂直：

例三



$\vec{N}\cdot\delta\vec{r}=0$

$\delta\vec{r}$ 又稱為 virtual displacement

與真實的位移 $d\vec{r}$ 不同。

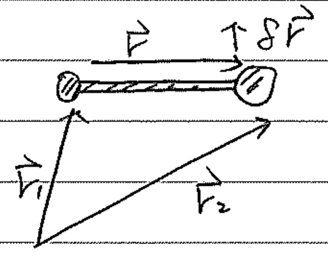
例如：如果斜面本身也能運動，則 $\delta\vec{r}$ 平行斜面

但 $d\vec{r}$ 不一定！因為只有 $\delta\vec{r}\cdot\vec{N}=0$

而 $d\vec{r}\cdot\vec{N}\neq0$

注意：有摩擦力則不適用。

例四



$\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$

$\delta\vec{r}\cdot\vec{F}=0$

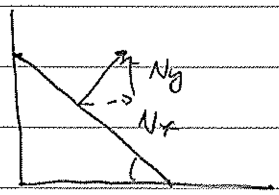
即 $\vec{F}\parallel\vec{r}_2-\vec{r}_1$!

一般而言，$\vec{r}_1\to\delta\vec{r}_1$，$\vec{r}_2\to\delta\vec{r}_2$

∴ δW (虛功) $=\delta\vec{r}_1\cdot\vec{F}_1+\delta\vec{r}_2\cdot\vec{F}_2$

上述對應到旋轉的情形，若 $\delta\vec{r}_1=\delta\vec{r}_2$ (平移)，則 ∵ $\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$ ∴ δW 仍 $=0$

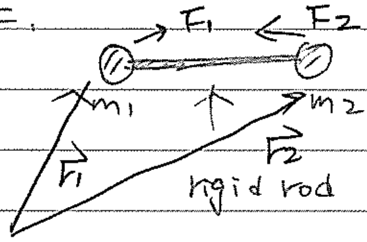
當然在此例中，大家都知道，額外需要之方程式為 $\vec{N}\perp$ 斜面，即



$$\frac{N_x}{N_y}=\tan\theta$$

如此，才能決定所有的變數。

例二.



如左圖，考慮由剛棒將 m_1 及 m_2 相連之系統。

由於剛棒之相連，m_1 及 m_2 各受 $\vec{F}_1$ 及 $\vec{F}_2$ 之限制力。

∴ 未知：$\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ 有 $3\times 4=12$ 個未知

而方程式則有，牛頓定律：
$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}=\vec{F}_1$$
$$m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}=\vec{F}_2$$

Constraint : $|\vec{r}_1-\vec{r}_2| = r =$ 固定

3rd law : $\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$

共有 10 個方程式，不足以解 12 個未知！

另外二個方程式，則是要求 $\vec{F}_1 \parallel \vec{r}_1-\vec{r}_2$，即

$$\vec{F}_1\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=0$$

與 $\vec{r}_1-\vec{r}_2$ 垂直之二個分量 $=0$。

這個要求雖令人合理，但是是必須引入的二個假設。

因為滿足 $|\delta\vec{r}|=0$ 之位移，只有 $\delta\vec{r}_1=\delta\vec{r}_2$ 及旋轉
(平移)
的情形，∴ 對一般的滿足constraint之位移 $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2$

$$\delta W = \sum_i \delta\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i^{\,constraint} = 0 \quad \text{---} ③$$

③式即所謂的 principle of virtual work，即
(虛功原理)

滿足 constraints 之虛位移，其所作之虛功為零。

③式提供了 ① 及 ② 式所缺少的 f 個獨立方程式：

首先，若沒有 constraints，則 $\delta\vec{r}_i$，$i=1,2,\ldots,N$ 彼此獨立，故 ③式中 $\delta\vec{r}_i$ 之係數 $\vec{F}_i^{\,constraint}$ 一定是 0，∴ $\vec{F}_i^{\,constraint}=0$

(因為 $\delta\vec{r}_i$ 彼此獨立，可以取 $\delta\vec{r}_1=0$，$\delta\vec{r}_2=\ldots=\delta\vec{r}_{i-1}=0$，
$\delta\vec{r}_{i+1}=\ldots=\delta\vec{r}_N=0$，∴ ③式 ⇒ $\delta\vec{r}_i\cdot\vec{F}_i^{\,constraint}=0$
∴ $\vec{F}_i^{\,constraint}=0$)

如果有 m 個 constraints，則 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$ 可以消去
($m=3N-f$)
$3N-f$ 個變數，即剩下 f 個彼此獨立可變數，我們可以記為 $q_1, q_2, \ldots, q_f$

因此，所有 x_i, y_i, z_i 皆可表示為 $q_1, q_2, \ldots q_f$ 之函數

$$x_i(q_1, q_2, \ldots, q_f)$$
$$y_i(q_1, q_2, \ldots, q_f) \qquad i=1,2,\ldots,N$$
$$z_i(q_1, q_2, \ldots, q_f)$$

則 $$\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

③式 $\Rightarrow \sum_{j=1}^{f}\left(\sum_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot \vec{F}_i^{constraint}\right)\delta q_j = 0 \quad \ldots ④$

$\because \delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_f$ 彼此獨立，$\therefore$ 其係數 $=0$

$$\therefore \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\vec{F}_i^{constraint} = 0 \quad \ldots ⑤$$

$\therefore$ ⑤式共有 $j=1,2,\ldots,f$ 個方程式，補足

了①及②所缺少之 f 個方程式！

D'Alembert's principle. ③式之缺點是 $\vec{F}_i^{constraint}$ 並不知道，

但 $\therefore$ 可以 透過②可以 外加力及"慣性力" $-m_i\ddot{\vec{r}}_i$ 表示，

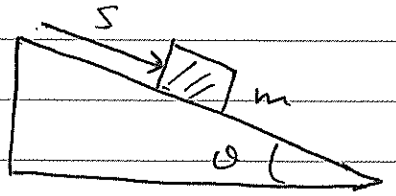
最後成為 $\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{appl.} - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \quad \ldots ⑥$

⑥式即為 ...... D'Alembert's principle

特別的，對靜力平衡 $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{appl.}\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \quad \ldots ⑦$

D'Alembert's principle 在解有 constraint 之系統十分有用。以下是一些例子：

例五：



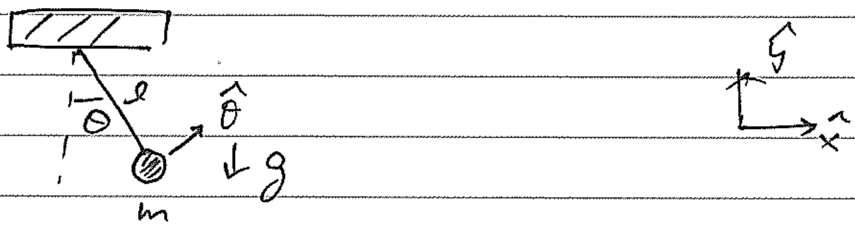
$$\delta\vec{r} = \delta s\,\hat{s}$$

$$\therefore\ \delta\vec{r}\cdot(\vec{F}^{appl} - m\ddot{\vec{r}})$$

$$= \delta s\,(mg\sin\theta - m\ddot{s}) = 0$$

$$\therefore\ \ddot{s} = g\sin\theta$$

例六：



Virtual displacement $\Rightarrow \delta\theta$, $\delta\vec{r} = l\,\delta\theta\,\hat{\theta}$

$$\delta\vec{r}\cdot(\vec{F}^{appl} - m\ddot{\vec{r}})$$

$$= l\,\delta\theta\,\hat{\theta}\cdot[-mg\,\hat{y} - ml\ddot{\theta}\,\hat{\theta} - \cdots\,\hat{r}] = 0$$

$$\therefore\ l\,\delta\theta\,(+mg\cos(\theta+\pi/2) - ml\ddot{\theta}) = 0$$

$$\therefore\ l\,\delta\theta\,(-mg\sin\theta - ml\ddot{\theta}) = 0$$

$$\therefore\ \ddot{\theta} = -g/l\,\sin\theta$$