

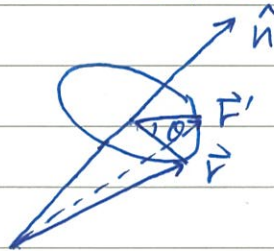
## + 剛體的轉動 (Rigid body rotation)

### Description of rotation

\* 描述轉動需要3個參數，如第九單元所述，

最簡單的描述是對某一 $\hat{n}$ 軸轉 $\theta$ 角（逆時

針為正，順時針為負），記為 $R_{\hat{n}}(\theta)$ ，且 $\vec{r}' = R_{\hat{n}}(\theta)\vec{r}$



\* 有限角度的轉動

- (i) 對同一軸  $\Rightarrow$  Commute (可交換)
  - 即  $R_{\hat{n}}(\theta_1)R_{\hat{n}}(\theta_2) = R_{\hat{n}}(\theta_2)R_{\hat{n}}(\theta_1)$
  - $= R_{\hat{n}}(\theta_1 + \theta_2)$
  - 故次序無關
- (ii) 對不同軸之轉動 次序有關

例： $R_x(\pi/2)R_z(\pi/2) \neq R_z(\pi/2)R_x(\pi/2)$

因此，對有限角度，無法以 $\theta\hat{n}$ （有3個參數）來描述

而必須以 $R_{\hat{n}}(\theta)$ 表示！（ $\theta\hat{n}$ 為一向量具有相加

性：即 $\theta_1\hat{n}_1 + \theta_2\hat{n}_2$ 為新的轉動？顯示<sup>這</sup>不成立，

$\therefore$  如果 $\theta_1\hat{n}_1 + \theta_2\hat{n}_2 = \theta\hat{n}$  = 新的轉動，則 $\theta\hat{n}_2 + \theta_1\hat{n}_1$

$= \theta\hat{n}$  too! 轉動之次序就不重要了！)

\* 無限小角度之轉動

當  $\theta \rightarrow 0$  時，  
 $\Delta\theta$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \theta \hat{n} \times \vec{r} \quad (\text{第九單位, p.p-5, eq. (9)}) - (1)$$

對 2 個不同軸之轉動

$$\vec{r}'_1 = \vec{r} + \theta_1 \hat{n}_1 \times \vec{r}$$

$$\vec{r}'_2 = \vec{r}'_1 + \theta_2 \hat{n}_2 \times \vec{r}'_1 = \vec{r} + (\theta_1 \hat{n}_1 + \theta_2 \hat{n}_2) \times \vec{r} + O(\theta^2)$$

故  $\theta_1 \hat{n}_1 + \theta_2 \hat{n}_2$  之轉動，即  $\theta \hat{n} = \theta_1 \hat{n}_1 + \theta_2 \hat{n}_2$ 。  
 相當於

因為，加法之次序無關，故無限小角之轉動可交換，且可以用向量表示。事實上，將 (1) 除以  $\Delta t$

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \hat{n} \times \vec{r} \equiv \vec{\omega} \times \vec{r}$$

此向量即為角速度  $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \hat{n}$ ， $\vec{\theta} = \theta \hat{n}$

\* Eulerian Angles

以  $R(\hat{n}, \theta)$  描述轉動的好處是簡單，但在運動之過程中， $\hat{n}$  軸並不一定固定，所以並不容易知道對那一軸轉動。

因此，比較好的描述是相對固定的

座標，一個最常用的描述是使用所謂的

Euler angles.



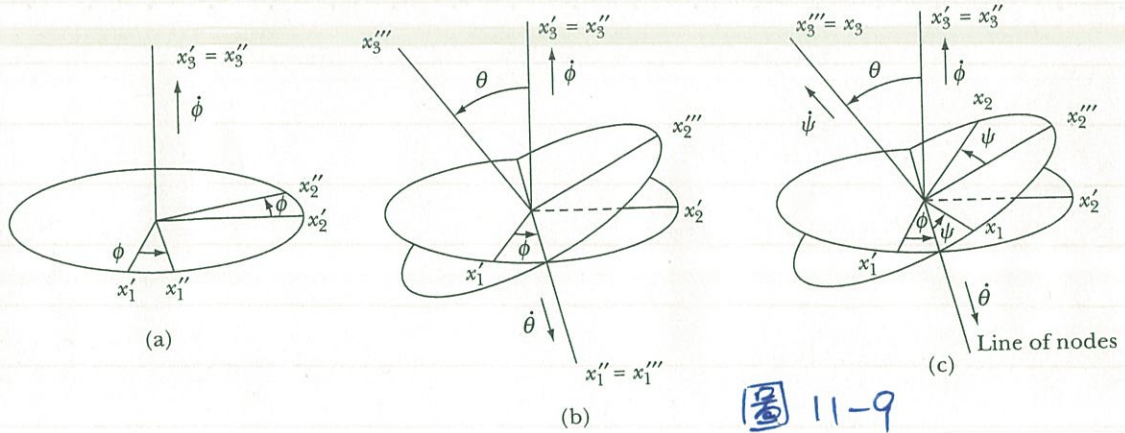
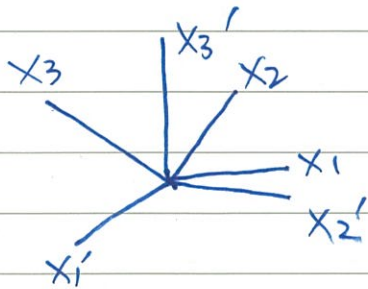


圖 11-9

如第九單元所用之符號，忽略平移運動， $x_1', x_2', x_3'$  為固定座標，而  $x_1-x_2-x_3$  為跟著物體轉動之座標



(如左圖)  $\rightarrow$  稱為 body-frame.

固定座標與 body frame 之間可由最上面 (a), (b), (c) 三圖之轉動得到：

(i) 由  $x_1-x_2-x_3$  及  $x_1'-x_2'-x_3'$  重合開始，先對  $x_3'$  轉動得到  $x_1''-x_2''-x_3''$

此時 同在  $x_1-x_2-x_3$  及  $x_1''-x_2''-x_3''$  之座標的 關係為  $R_{x_3'}(\phi)$

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \dots (2)$$

(ii) 對新的  $x_1''$  軸轉  $\theta$ ，得  $x_1'''-x_2'''-x_3'''$

$$\begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} \quad \text{--- (3)}$$

(iii) 最後對  $x_3'''$  轉  $\psi$ , 得到  $x_1 x_2 x_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} \quad \text{--- (4)}$$

由 (2), (3) 及 (4) 式可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = R_{x_3''}(\psi) R_{x_1''}(\theta) R_{x_3'}(\phi) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \quad \text{--- (5)}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi \cos\phi - \cos\theta \sin\phi \sin\psi & \cos\psi \sin\phi + \cos\theta \cos\phi \sin\psi & -\sin\psi \cos\theta \\ -\sin\psi \cos\phi - \cos\theta \sin\phi \cos\psi & -\sin\psi \sin\phi + \cos\theta \cos\phi \cos\psi & \cos\psi \sin\theta \\ \sin\theta \sin\phi & -\sin\theta \cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$(\phi, \theta, \psi)$  即為 Euler angles

\*  $\vec{\omega}$  in Euler's angles.

以 Euler angles 描述,  $\phi$ ,  $\theta$  及  $\psi$  是 3 個對應之角速度, 其方向如圖 11-P 所示。

因如對  $x_1 x_2 x_3$  (body frame) 而言,  $\phi$  對  $x_1$  軸之

投影為:  $\dot{\phi}_1 = \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi$

對  $x_2$  投影:  $\dot{\phi}_2 = \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi$

"  $x_3$  ... :  $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos\theta$



同理,  $\dot{\theta}$  对  $X_1, X_2$  及  $X_3$  軸之投影為

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \psi$$

$$\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi$$

$$\dot{\theta}_3 = 0$$

$\dot{\psi}$  对  $X_1, X_2$  及  $X_3$  軸之投影為

$$\dot{\psi}_1 = 0$$

$$\dot{\psi}_2 = 0$$

$$\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$$

故  $\vec{\omega}$  在  $X_1$  軸之投影為  $\omega_1 = \dot{\phi}_1 + \dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1$

$$= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

在  $X_2$  軸之投影:  $\omega_2 = \dot{\phi}_2 + \dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2$

$$= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$$

在  $X_3$  軸之投影:  $\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$

即  $\vec{\omega} = (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \hat{e}_1$

$$+ (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \hat{e}_2 \quad \dots \textcircled{6}$$

$$+ (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{e}_3$$

### 角動量 与 角動量守恒

角動量為“為了專注与轉動有關之力”所定義

出來對應之“動量”。

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) \equiv \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad \vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$$

$\vec{p}$  沿切線投影

### 對多質點系統

$$L = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} \quad \dots \quad (7)$$

則  $\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \dot{\vec{p}}_{\alpha}$

$$= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \left( \vec{F}_{\alpha}^{(e)} + \sum_{\beta} \vec{f}_{\alpha\beta} \right)$$

$$= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{(e)} + \sum_{\substack{\beta \neq \alpha \\ \alpha, \beta}} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha\beta}$$

$$\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha < \beta} (\vec{r}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha\beta} + \vec{r}_{\beta} \times \vec{f}_{\beta\alpha})$$

$$= \sum_{\alpha < \beta} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}) \times \vec{f}_{\alpha\beta}$$

$\therefore \vec{f}_{\beta\alpha} = -\vec{f}_{\alpha\beta}$  (weak form of Newton's 3rd law)

如果我們要求  $\vec{f}_{\alpha\beta} \parallel \vec{r}_{\alpha\beta} (\equiv \vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta})$

(strong version of Newton's 3rd law),

則  $\vec{r}_{\alpha\beta} \times \vec{f}_{\alpha\beta} = 0$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{(e)} \quad \dots \quad (8)$$

即  $\frac{dL}{dt} =$  力矩完全由外力決定，因此，當  $\vec{F}_{\alpha}^{(e)} = 0$ ,

則  $\frac{dL}{dt} = 0$ 。  $L$  是守恆的！

### 摩擦的角色

轉動問題一個重要的特色就是 原點 的選取  
表面上似乎



如  $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{F}$ , 对相同之  $\vec{F}$ , 选不同之原点对应到不同之  $\vec{r}$ ,

故  $\vec{c}$  也不同。

其主要的原因是力矩只是力的内积, 含量, 並不完整,

对刚体而言, 原点的選擇代表了平动的自由度, (一般在質心)  
而相對於此质心則只剩轉動自由度 (即相對於此质心距離固定), 故只需力之內积含量即足夠。

也就是說, 力矩是為了描述剛體所衍生之概念而对剛體而言, 原點選擇之問題並不大。

例: 对單質点而言,  $\vec{F}_e = 0$  時,

平頓力学:  $\vec{p} = \text{常數}$

轉動...  $\vec{r} \times \vec{p} = \dots$

$\rightarrow$   $c_0 =$  者並不一定一樣  
如圓周運動  $\vec{r} \times \vec{p}$   
亦為常數而  $\vec{p}$  並非常數

注意: 當  $\sum \vec{F}_i^{(e)} = 0$  時,

改變原點:  $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \vec{a}$

$$\therefore \vec{a} \times \underbrace{\sum \vec{F}_i^{(e)}}_0 = 0$$

故  $\vec{c}^{(e)} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}$  与座標無關

同理,  $\vec{c}$  与座標原點也有關。若取原點為質心

$$\text{則 } \vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i'$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{P}_i$$

$$= \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{R}_{CM}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{V}_{CM})$$

$$= \underbrace{\sum_i \vec{r}_i' \times \vec{P}_i'}_{\vec{L}'} + \vec{R}_{CM} \times \underbrace{M \vec{V}_{CM}}_{\vec{P}_{CM}}$$

$$(\sum_i m_i \vec{v}_i' = 0)$$

因此，所有以原點為開的 都吸收到質心之  
運動中！

$$\begin{aligned} \text{此時, } \therefore \vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i + \vec{R}_{CM} \times \sum_i \vec{F}_i \\ &= \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i + \vec{R}_{CM} \times \vec{F}^{(e)} \end{aligned}$$

$$\text{且 } \frac{d \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{CM}}{dt} = \vec{R}_{CM} \times \frac{d \vec{P}_{CM}}{dt} = \vec{R}_{CM} \times \vec{F}^{(e)} \quad \text{--- (9)}$$

則  $\frac{d \vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$  可知 若  $\vec{\tau} = 0$  則  $\frac{d \vec{L}}{dt} = 0$  以原點為開，可  
不取 CM 為原點

$$\frac{d \vec{L}'}{dt} = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i \equiv \vec{\tau}' \quad \text{--- (10)}$$

即相對於質心之角動量滿足一般力矩 = 角動

量變化之關係，且力矩是以質心為原點測量。(習題 3 Ex 2)

注意：正如例一所言，(9)式並包含質心所有運動

的資訊，完整的描述  
須使用  $\vec{M} \vec{a}_{CM} = \vec{F}^{(e)}$

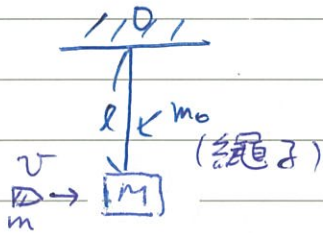


取固定點為原點：對剛體而言，若有一點固定，則

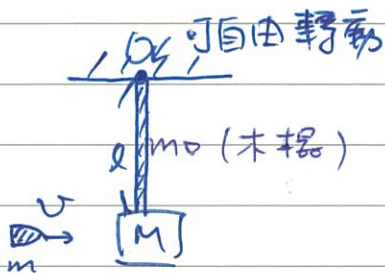
可以取此點為原點，再使  $\frac{dL}{dt} = \tau$

其中  $L$  由此點量起。

例二：動量守恒或角動量守恒？



如左圖，一子彈打入木塊  $M$  中  
立刻停在木塊中，則木塊之  
末速度為何？



上、下二圖之差別在於  $M$  與  $O$  之  
連接一卷為繩子，一卷為木棍。

\* 對繩子而言， $\because$  碰撞時間很短，所以  
繩子施加在  $m+M$  之外力之作用  $\approx 0$

故動量守恒， $mV = (m+M)v_1$ ， $v_1 = \frac{mV}{m+M}$   
L --- (11)

\* 對木棍而言，它與  $M$  形成一剛體，其作用遠大於  
 $m$  與  $M$  碰撞之力，故必須與  $M$  一起考慮。

與  $M$  形成剛體，只有  $O$  點固定，故以  $O$  為原點，  
且沒有外力矩，故角動量守恒，

$$mvl = (m+M)v_2l + I\omega$$

I 為木棍  
L --- (12)

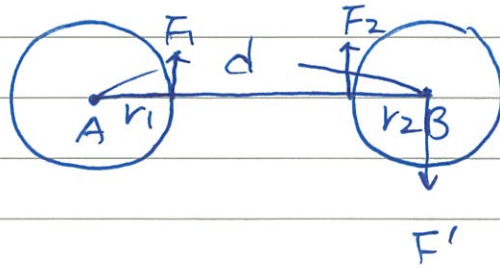
相對  $O$  之轉動慣量， $I = \frac{1}{3}m_0l^2$

由 (11) 及 (12) 可知  $v_1 \neq v_2$ ，只有當  $m_0 \rightarrow 0$ ， $v_1 = v_2$

此時平動  $F=ma$  及轉動力學  $\tau = \frac{dL}{dt}$  一致 ( $\because$   $l$  與  $p$  垂直之故)

當有 2 處以上固定時，則可各以固定處計算：

例



以 A 處為支點，則  $\tau = r_1 F_1 + (d - r_2) F_2 - F' d$

$\because$  B 處固定， $\therefore F' = F_2 \quad \therefore d F_2 - F' d = 0$

$\tau = r_1 F_1 - r_2 F_2$  與各以 A 及 B 處  
所計算之結果一致。

### 轉動慣量張量 (inertia tensor)

對一個純轉動之物件，

由於  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  ( $\vec{\omega}$  = 角速度)

故物件之角動量為

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})$$

利用  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$

可得  $\vec{r}_{\alpha} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}) = \vec{\omega} r_{\alpha}^2 - \vec{r}_{\alpha} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\alpha})$

故  $\vec{L} = \sum_{\alpha} [m_{\alpha} r_{\alpha}^2 \vec{\omega} - m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\alpha})] \quad \dots (13)$

(13) 式可以以矩陣的形式表示。首先，(13) 式之分量表示為

$$L_i = \sum_{\alpha} [m_{\alpha} r_{\alpha}^2 \omega_i - (m_{\alpha} \sum_j \omega_j X_{\alpha j}) X_{\alpha i}] \quad , \quad i=1, 2, 3$$



$$\therefore \omega_i = \sum_j \delta_{ij} \omega_j$$

$$\therefore L_i = \sum_j \left[ \underbrace{\sum_{\alpha} (m_{\alpha} x_{\alpha}^2)}_{I_{ij}} \delta_{ij} - m_{\alpha} x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right] \omega_j \quad \dots (14)$$

因此括弧中的量 (i) 与  $\omega$  無關 (ii) 有 2 個指標 i 及 j, 故可記為  $I_{ij}$ , 為 與各物體幾何有關的 量, 稱為 轉動慣量張量 (Inertia Tensor)

(14) 式以矩陣表示為

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

因此, 轉動慣量是為一

矩陣。注意,  $\because I_{ji} = \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha}^2 \right) \delta_{ji} - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha j} x_{\alpha i}$   
 $= I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \delta_{ij} - \sum_k x_{\alpha k}^2 \right) - x_{\alpha i} x_{\alpha j}$

故  $\mathbf{I}$  為一 對稱 矩陣。 (只須告知  $I_{11}, I_{22}, I_{33}, I_{12}, I_{13}$  及  $I_{23}$  6 個分量即可)。

如果將  $\delta_{ij} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  記為  $\mathbf{I}$  (單位矩陣)

$$x_{\alpha i} x_{\alpha j} \leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} (x_1 \ x_2 \ x_3)}_{\mathbf{r} \mathbf{r}^T} = \begin{pmatrix} x_1 x_1 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 x_1 & x_2 x_2 & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_3 x_3 \end{pmatrix}$$

則  $\vec{L} = (\sum m \omega^2 r^2) \vec{\omega} - \sum m \omega \vec{r} \vec{r}^T$ ,  $\vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega}$  --- (15)  
 $\vec{I}$  是矩陣的結果使得  $\vec{L}$  不一定平行  $\vec{\omega}$ !

張量 (tensor): 轉動慣量  $\vec{I}$  除了是一個矩陣外也是  
 個 2 階張量 (2nd rank tensor)。

正如任意 3 個數並不一定形成向量, 任一矩陣  
 也不一定是張量。一個有 2 個指標 (index) 之  
 量是不是張量取決於它在旋轉下之變換:

給定  $T_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), 若在旋轉下,  $X'_i = R_{ij} X_j$

$T'_{ij} = \sum_{kl} R_{ik} R_{jl} T_{kl}$ , 則  $T_{ij}$  為 2 階張量。

其中  $R_{ij}$  為旋轉矩陣 (如 Eq. (5))。

n 階張量  
 $T_{abcd} \dots$   $\swarrow$  n indices  
 $= \sum R_{ai} R_{bj} R_{ck} R_{dl} \dots$   
 $i j k l \dots \times T_{ijkl} \dots$

由 (14) 式可知

$$I'_{ij} = (\sum m \omega^2 r^2) \delta_{ij} - m \omega X_{ai} X_{aj}$$

$\therefore$  旋轉下, 長度不變,  $\therefore r'^2 = r^2$

$$\text{且 } \sum_k R_{ik} R_{jk} = \delta_{ij}$$

$$\text{故 } \sum_{i'j'} R_{ii'} R_{jj'} \delta_{i'j'} = \sum_k R_{ik} R_{jk} = \delta_{ij}$$

$$\text{因此, } I'_{ij} = \sum_{i'j'} R_{ii'} R_{jj'} (\sum m \omega^2 r^2) \delta_{i'j'} - R_{ii'} R_{jj'} m \omega X_{ai'} X_{aj'}$$

$$= \sum_{i'j'} R_{ii'} R_{jj'} I_{i'j'}, \quad \vec{I} \text{ 為 2 階張量 --- (16)}$$



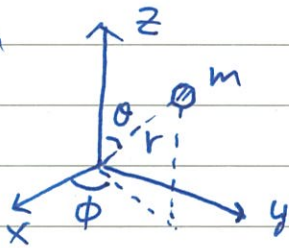
注意：對連續分佈之物体， $m_\alpha = \rho(v) dv$ ， $\sum m_\alpha$

要改為積分，故

$$I_{ij} = \int_V \rho(\vec{r}) \left( \delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j \right) dV$$

其中  $\rho(\vec{r})$  為在  $\vec{r}$  之密度。

例：三，



如左圖，一質點之

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi$$

$$x_2 = r \sin \theta \sin \phi$$

$$x_3 = r \cos \theta$$

$$\text{故 } \sum_\alpha m_\alpha r_\alpha^2 = m r^2$$

$$I_{11} = m r^2 - m x_1^2 = m r^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi)$$

$$I_{22} = m r^2 - m x_2^2 = m r^2 (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi)$$

$$I_{33} = m r^2 - m x_3^2 = m r^2 \sin^2 \theta$$

$$I_{12} = -m x_1 x_2 = -m r^2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi$$

$$I_{13} = -m x_1 x_3 = -m r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi$$

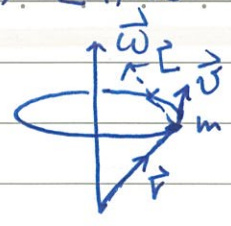
$$I_{23} = -m x_2 x_3 = -m r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi$$

$$\text{故 } \underline{I} = m r^2 \begin{pmatrix} 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi & -\sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi & -\sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ -\sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi & 1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi & -\sin \theta \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \cos \theta \sin \phi & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

由於  $\underline{I}$  並非  $\begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}$  之形式，即非對

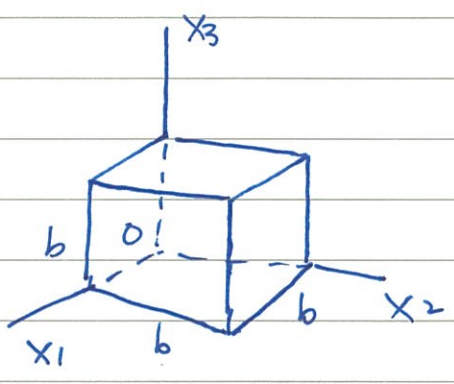
角化 (diagonalized) 形式， $\therefore \underline{I} = \underline{A} \cdot \underline{\omega}$  並不平行  $\underline{\omega}$ 。

事實上， $[H\omega]$  可以考慮  $m$  對  $z$  軸旋轉而直接了解：



如左圖  $L = r \times m\vec{v}$  並不平行於  $\omega$ ！

例四：一均勻牙塊其中一角為原點（如左下圖），



求  $\vec{I}$ 。

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \rho \int_0^b dx_1 \int_0^b dx_2 \int_0^b dx_3 (r^2 = x_1^2) \\
 &= \rho \int_0^b dx_1 \int_0^b dx_2 \int_0^b dx_3 (x_2^2 + x_3^2) \\
 &= \rho b^2 \left( \int_0^b dx_2 x_2^2 + \int_0^b dx_3 x_3^2 \right) \\
 &= \frac{2}{3} \rho b^5
 \end{aligned}$$

$$\therefore \rho = \frac{M}{b^3} \quad \therefore I_{11} = \frac{2}{3} M b^2$$

同理  $I_{22} = \rho \int_0^b dx_1 \int_0^b dx_2 \int_0^b dx_3 (x_1^2 + x_3^2) = I_{11}$  (152 對稱)

$I_{33} = \rho \int_0^b dx_1 \int_0^b dx_2 \int_0^b dx_3 (x_1^2 + x_2^2) = I_{11}$  (153 對稱)

$$\begin{aligned}
 I_{12} &= -\rho \int_0^b dx_1 \int_0^b dx_2 \int_0^b dx_3 x_1 x_2 \\
 &= -\rho b \left( \int_0^b dx_1 x_1 \right) \left( \int_0^b dx_2 x_2 \right) = -\rho b \frac{b^2}{4} = -\frac{1}{4} M b^2
 \end{aligned}$$

$$I_{13} = -\rho b \left( \int_0^b dx_1 x_1 \right) \left( \int_0^b dx_3 x_3 \right) = -\frac{1}{4} M b^2$$

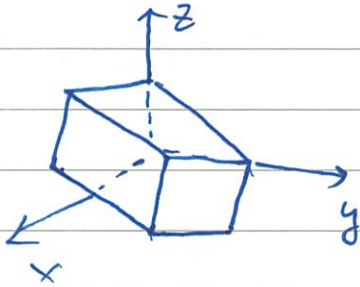
$$I_{23} = -\frac{1}{4} M b^2$$

故  $\vec{I} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta \end{pmatrix} \quad \beta = M b^2$



上例是比較對稱的物體，故只須計算  $I_{11}$  及  $I_{22}$  2 個量即足夠。

很明顯的，這在一般情形並不成立，以上例為例 如果座標取的不是那麼對稱（如左下圖），則



似乎仍須計算  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$ ,  $I_{12}$ ,  $I_{13}$  及  $I_{23}$  6 個量。

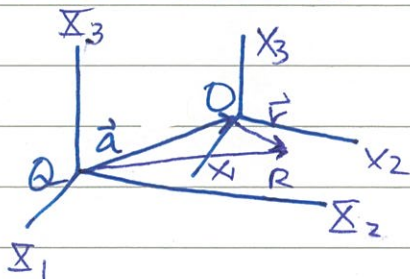
另外，如果形狀不對稱，  
物體

也似乎要計算 6 個量。

這些都只是表面上的結果，實際上，並不須要計算 6 個量，對一般物體而言，最好只需計算 3 個量即可，這可由宇的教學性質加以理解。

## 轉動慣量的性質

### 平行軸定理 (Steiner's parallel-axis theorem)



宇顯然與原系有關，若原系平移到（如左圖， $O \rightarrow O'$ ， $\vec{a}$ ），

則因為  $\vec{R}_\alpha = \vec{a} + \vec{r}_\alpha$ ， $\bar{x}_{\alpha i} = x_{\alpha i} + a_i$

在  $Q$  座標中之  $\vec{I} \equiv \vec{J}$ ，

$$J_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_{\alpha} (x_{\alpha k} + a_k)^2 - (x_{\alpha i} + a_i)(x_{\alpha j} + a_j) \right]$$

$$= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha k}^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right] \quad \leftarrow I_{ij}$$

$$+ \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_k (2 x_{\alpha k} a_k + a_k^2) - (a_i x_{\alpha j} + a_j x_{\alpha i} + a_i a_j) \right]$$

$$= I_{ij} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_k a_k^2 - a_i a_j \right]$$

$$+ \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ 2 \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha k} a_k - a_i x_{\alpha j} - a_j x_{\alpha i} \right] \quad \dots (17)$$

(17) 式為一般平面的轉動慣量合量之關係。  
 相對

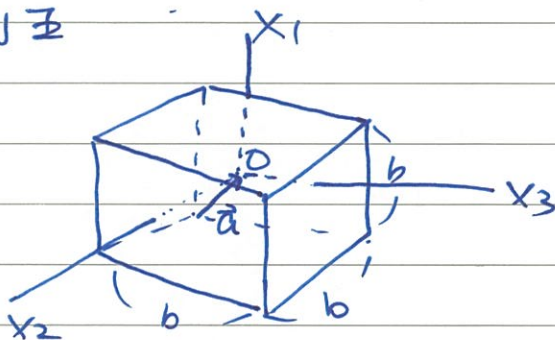
如果取 O 點為質心，則 (17) 式右式之第 3 項中

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha k} = 0, \quad \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha j} = 0, \quad \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha i} = 0$$

$$\text{故 } I_{ij} = I_{ij}^{CM} + \underbrace{\left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \right)}_M \left( \delta_{ij} \underbrace{\sum_k a_k^2}_{a^2} - a_i a_j \right) \quad \dots (18)$$

因此，一旦知道對質心之  $I_{ij}^{CM}$ ，對其他點的轉動慣量可輕易的由 (18) 式求得。(此為平行軸定理)

例五



同例四之立方體，但  
取原点在正中心，

$$\text{則 } I_{ij} = I_{ij}^{CM} = I_{ij} \text{ (例四)} \\ - M(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j)$$

$$\because \vec{a} = \left( \frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right), \quad a^2 = \frac{3}{4} b^2$$



故  $M(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{Mb^2}{2} & -\frac{Mb^2}{4} & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{Mb^2}{2} & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{Mb^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{4} & -\frac{\beta}{4} \\ -\frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{4} \\ -\frac{\beta}{4} & -\frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } I_{CM} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\beta & -\frac{\beta}{4} & -\frac{\beta}{4} \\ -\frac{\beta}{4} & \frac{2}{3}\beta & -\frac{\beta}{4} \\ -\frac{\beta}{4} & -\frac{\beta}{4} & \frac{2}{3}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{4} & -\frac{\beta}{4} \\ -\frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{2} & -\frac{\beta}{4} \\ -\frac{\beta}{4} & -\frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\beta}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{6} \end{pmatrix}$$

由此例可知，转动惯量可能得简化。在此例中，

由於  $x_1, x_2, x_3$  軸取得對稱之關係，在原質心到質心後，不僅被简化，且  $I_{CM} \propto \mathbb{I}$ 。

(principal axes)

转动惯量之主軸及其对角化

由以上的討論可知，除了將原質心在質心外，軸之方向的選擇也可以简化。

以正立方為例，只有在  $x_1, x_2, x_3$  平行於其三邊時，質心才对角化為  $\begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}$  之形式。

事實上，即使原質心不在質心，適當可選取  $x_1, x_2, x_3$  三軸也可以將 質心 对角化。(見下面的證明)。

也就是說， $\vec{I}$  之 2 階張量 (Eq. (16)) 的特性

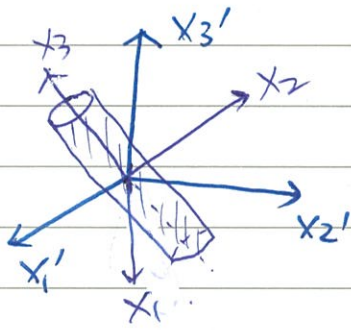
表示了真正需要計算的量並非表面上

$I_{11}, I_{22}, I_{33}, I_{12}, I_{13},$  及  $I_{23}$  之 6 個量，如果

座標軸選對了，正如正交係一樣，則對如

座標軸  $(x_1, x_2, x_3)$  而言， $\vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$ ，只需計算

$I_1, I_2,$  及  $I_3$  皆可。此時，對於原先待計算之



座標軸的  $\vec{I}$  則可經由 (如左圖所示意)

$$I'_{ij} = \sum_{r,s} R_{ir} R_{js} I_{rs} \quad (\text{eq. (16)})$$

得到。

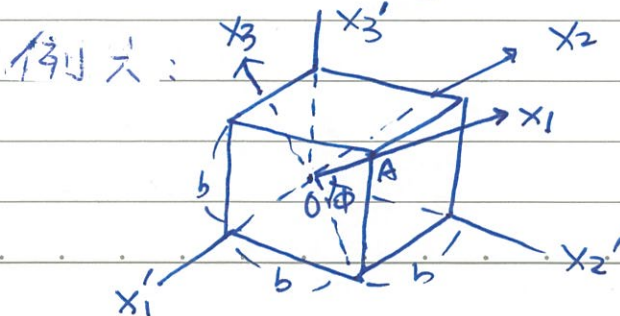
以矩陣表示， $I'_{ij} = \sum_{r,s} R_{ir} R_{js} I_{rs}$

$R^T$  為  $R$  之 transpose (即行與列對調)

$$R R^T = \mathbb{I} \quad \therefore R^T = R^{-1} \quad (\text{見上學期之筆記})$$

$\therefore I' = R I R^T$  --- (17) 其中  $R$  是將  $x_1, x_2, x_3$

轉到  $x_1', x_2', x_3'$  之轉矩陣。



如左圖，如果以  $x_1, x_2, x_3$  計算

例 (14) 之立序係的  $\vec{I}$ ，

因為由  $x_1', x_2', x_3'$

到  $x_1, x_2, x_3$



可透過 2 次轉動: (i) 對  $X_3'$  轉  $45^\circ$ ,  $X_1' X_2' X_3' \rightarrow X_1'' X_2'' X_3''$ .

$$R_{X_3'}(45^\circ) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{set } \phi = 45^\circ \text{ in } \textcircled{2})$$

(ii) 對  $X_2''$  轉  $\phi$  使得  $X_1''$  到達  $\vec{0}$

$$\therefore \cos\phi = \frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{3}b} \quad \therefore \phi = \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \sin\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{故 } R_{X_2''}(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } R = R_{X_2''}(\phi) R_{X_3'}(45^\circ) \quad R^{-1} = R^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

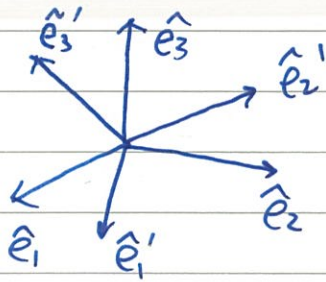
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\text{相對於 } X_1 X_2 X_3 \text{ 之 } I' = R \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\beta & \frac{\beta}{4} & \frac{\beta}{4} \\ -\frac{\beta}{4} & \frac{2}{3}\beta & -\frac{\beta}{4} \\ -\frac{\beta}{4} & -\frac{\beta}{4} & \frac{2}{3}\beta \end{pmatrix} R^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8}{3}\beta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}\beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}\beta \end{pmatrix}$$

因此, 在如例中, 轉到正確的座標軸後,  $I'$  是對角化的, 故只須計算 3 個量,  $I_1, I_2,$  及  $I_3$ .

## \* 旋轉矩陣之互反性



如左圖，旋轉前後之單位

向量各為  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  及

$\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ ,  $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ ,  $\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \delta_{ij}$

將  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  以  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  表示，

$$\hat{e}_1 = x\hat{e}'_1 + y\hat{e}'_2 + z\hat{e}'_3$$

$$\text{其中 } x = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_1, \quad y = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_2, \quad z = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_3$$

$$\equiv R_{11}$$

$$\equiv R_{21}$$

$$\equiv R_{31}$$

$$\text{同理 } \hat{e}_2 = R_{12}\hat{e}'_1 + R_{22}\hat{e}'_2 + R_{32}\hat{e}'_3$$

$$\hat{e}_3 = R_{13}\hat{e}'_1 + R_{23}\hat{e}'_2 + R_{33}\hat{e}'_3$$

$$R_{ij} = \hat{e}_j \cdot \hat{e}'_i$$

再利利用  $\vec{v} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$  (有 2 種方法表示)

$$= x'_1\hat{e}'_1 + x'_2\hat{e}'_2 + x'_3\hat{e}'_3$$

$$= (x_1 R_{11} + x_2 R_{12} + x_3 R_{13}) \hat{e}'_1$$

$$+ (x_1 R_{21} + x_2 R_{22} + x_3 R_{23}) \hat{e}'_2$$

$$+ (x_1 R_{31} + x_2 R_{32} + x_3 R_{33}) \hat{e}'_3$$

故

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (i)$$

如觀察說明  $\Rightarrow$

$$\hat{e}_1 \quad \hat{e}_2 \quad \hat{e}_3$$

在  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  投  
影之 3 分量



$$\therefore \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad (\text{行与行垂直})$$

$$\text{故} \quad \begin{aligned} R_{11}^2 + R_{21}^2 + R_{31}^2 &= 1 & \text{且} \quad \sum_n R_{ni} R_{nj} &= \delta_{ij} \\ R_{12}^2 + R_{22}^2 + R_{32}^2 &= 1 \\ R_{13}^2 + R_{23}^2 + R_{33}^2 &= 1 \end{aligned}$$

同理, 可以令  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  以  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  表示

$$\hat{e}'_1 = (\hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1 + (\hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_2) \hat{e}_2 + (\hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_3) \hat{e}_3$$

由  $R_{ij} = \hat{e}_j \cdot \hat{e}'_i$  之定義可知

$$\hat{e}'_1 = R_{11} \hat{e}_1 + R_{12} \hat{e}_2 + R_{13} \hat{e}_3$$

$$\text{同理} \quad \hat{e}'_2 = R_{21} \hat{e}_1 + R_{22} \hat{e}_2 + R_{23} \hat{e}_3$$

$$\hat{e}'_3 = R_{31} \hat{e}_1 + R_{32} \hat{e}_2 + R_{33} \hat{e}_3$$

$$\vec{r} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 = x'_1 \hat{e}'_1 + x'_2 \hat{e}'_2 + x'_3 \hat{e}'_3$$

$$\begin{aligned} &= (x'_1 R_{11} + x'_2 R_{21} + x'_3 R_{31}) \hat{e}_1 + (x'_1 R_{12} + x'_2 R_{22} + x'_3 R_{32}) \hat{e}_2 \\ &\quad + (x'_1 R_{13} + x'_2 R_{23} + x'_3 R_{33}) \hat{e}_3 \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \equiv R \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad \dots (ii)$$

在  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$   
投影之分量

故  $\sum_n R_{in} R_{jn} = \delta_{ij}$  也成立, 即行垂直於行,

列垂直於列

以矩陣角度來說

比較 (i) 及 (ii) 可得  $A = R^{-1}$

$$\text{且 } A = R^T$$

故  $R^T = R^{-1}$ ,  $RR^T = I$



而三個互正對角化之軸則稱為轉動慣量之

主軸 (principle axes).

例六只是一個特例，對一般的  $I_{ij}$ ，是否一定可以

找到主軸，而使其對角化呢？

在數學上，這是可以證明的，以下一一說明。

其主要的依據有 (i)  $I_{ij}$  是實數 (ii)  $I_{ij} = I_{ji}$  (對稱)  
(即實數對稱矩陣一定可被對角化)

\* 對角化與本徵值及本徵向量 (eigenvalue & eigenvector)

$$\text{如果 } R I R^{-1} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{則 } R I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} R$$

$$\text{即 } \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_1 R_{11} & I_1 R_{12} & I_1 R_{13} \\ I_2 R_{21} & I_2 R_{22} & I_2 R_{23} \\ I_3 R_{31} & I_3 R_{32} & I_3 R_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } \left. \begin{aligned} R_{1j} I_{j1} &= I_1 R_{11} \\ R_{1j} I_{j2} &= I_1 R_{12} \\ R_{1j} I_{j3} &= I_1 R_{13} \end{aligned} \right\} \text{因為 } I_{ji} = I_{ij} \quad \dots (18)$$

故 (19) 式又可寫為

$$\begin{pmatrix} I_1 & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix} = I_1 \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix} \quad \dots (19)$$

即  $\begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix}$  為  $I$  之所謂的本徵向量 (eigenvector)

而  $I_1$  為本徵值。  
對應之

$$\text{同理 } I \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \end{pmatrix}, \quad I \begin{pmatrix} R_{31} \\ R_{32} \\ R_{33} \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} R_{31} \\ R_{32} \\ R_{33} \end{pmatrix} \quad \dots (20)$$

因此，將  $I$  轉成對角化形式即在於找  $I$  之

本徵值及本徵向量，以下是有關本徵值及本徵向量之教學性質：

\* 本徵值之求法：

$$I\vec{w} = \lambda\vec{w} \quad \therefore (I - \lambda I)\vec{w} = 0$$

由基礎教學可知，上式要有解則  $\det(I - \lambda I) = 0 \dots (21)$   
(secular eq.)

求 (21) 式即可解出  $\lambda$ 。

因為  $I$  及  $I$  為  $3 \times 3$  矩陣，故  $\det(I - \lambda I)$  為

$\lambda$  之 3 次的項式，一定有  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ，3 個解。

\* 對稱的實矩陣，其本徵值必為實數



雖然 (2) 式 一定有 3 個 解,  $\lambda_i, (i=1, 2, 3,$

問題是  $\lambda_i$  可能是複數, 而要成為轉動

慣量  $I_i, \lambda_i$  必須是實數, 而此實是

由  $I_i$  之 對稱 及 實數 保證的:

$$\text{考慮} \quad I \vec{\omega}_n = \lambda_n \vec{\omega}_n \quad \dots \quad (22)$$

$$I \vec{\omega}_m = \lambda_m \vec{\omega}_m \Rightarrow I \vec{\omega}_m^* = \lambda_m^* \vec{\omega}_m^* \dots (23)$$

由  $\vec{\omega}_m^* \cdot (22) - \vec{\omega}_n \cdot (23)$  可得

$$(\lambda_n - \lambda_m^*) \vec{\omega}_n \cdot \vec{\omega}_m^*$$

$$= \vec{\omega}_m^* \cdot (I \vec{\omega}_n) - \vec{\omega}_n \cdot (I \vec{\omega}_m^*) \quad \dots \quad (24)$$

其中右式所涉及之運算為  $\vec{a} \cdot (I \vec{b})$  及  $\vec{b} \cdot (I \vec{a})$

$$\therefore \vec{a} \cdot (I \vec{b}) = \sum_{ij} a_i (I_{ij} b_j) = \sum_{ij} a_i I_{ij} b_j$$

$$\vec{b} \cdot (I \vec{a}) = \sum_i b_i \sum_j I_{ij} a_j = \sum_{ij} a_j I_{ij} b_i = \sum_{ij} a_i I_{ji} b_j$$

(對稱)  
對稱

因此 對稱的矩陣,  $\vec{a} \cdot (I \vec{b}) = \vec{b} \cdot (I \vec{a})$

故 (24) 式之右式 = 0, 可得

$$(\lambda_n - \lambda_m^*) \vec{\omega}_n \cdot \vec{\omega}_m^* = 0 \quad \dots \quad (25)$$

當  $n=m$  時,  $\vec{\omega}_n \cdot \vec{\omega}_n^* = |\vec{\omega}_n|^2 > 0$

故  $\lambda_n = \lambda_n^*$ , 即  $\lambda_n$  必為實數

因為 3 次多項式中有 3 個根，因此，上面

證明了此 3 個根  $\lambda_i, i=1, 2, 3$  均為實數  
可作為轉動慣量。

\* 正交性 (orthogonality)

因為  $\lambda_n$  為實數，且  $I_{ij}$  為實數， $I\vec{\omega} = \lambda\vec{\omega}$   
故  $\vec{\omega}$  為實向量。

$$(25) \text{式} \Rightarrow (\lambda_n - \lambda_m) \vec{\omega}_n \cdot \vec{\omega}_m = 0$$

因此，若  $\lambda_n \neq \lambda_m$ ，則  $\vec{\omega}_n \cdot \vec{\omega}_m = 0$ ，即  $\vec{\omega}_n \perp \vec{\omega}_m$ 。

反之，若  $\lambda_n = \lambda_m$  (稱為簡併，degenerate)，此時

$$\therefore I\vec{\omega}_n = \lambda_n \vec{\omega}_n$$

$$I\vec{\omega}_m = \lambda_n \vec{\omega}_m$$

$\therefore$  任意  $\vec{\omega}_n$  及  $\vec{\omega}_m$  之線性組合， $\alpha\vec{\omega}_n + \beta\vec{\omega}_m$

$$\text{皆滿足 } I(\alpha\vec{\omega}_n + \beta\vec{\omega}_m) = \lambda_n(\alpha\vec{\omega}_n + \beta\vec{\omega}_m)$$

可透過所謂之 Gram-Schmidt 方法得其

正交化：

$$\text{取 } \vec{\omega}_m' = \vec{\omega}_m - (\vec{\omega}_m \cdot \hat{\omega}_n) \hat{\omega}_n = \vec{\omega}_m - \frac{\vec{\omega}_m \cdot \vec{\omega}_n}{\omega_n^2} \vec{\omega}_n$$

很明顯的  $I\vec{\omega}_m' = \lambda_n \vec{\omega}_m'$

$$\text{且 } \vec{\omega}_m' \cdot \vec{\omega}_n = 0$$



故字之本徵向量為實向量且可取為互相垂直 (orthogonal).

如果將其 normalized, 即  $|\vec{w}_n|^2 = 1$

$$\text{則 } \underline{\vec{w}_n \cdot \vec{w}_m = \delta_{nm} \quad \text{且} \quad \mathbb{I} \vec{w}_n = \lambda_n \vec{w}_n} \quad \dots (26)$$

### \* Similar transformation

由 (26) 式可知, 所求得之 3 個本徵向量  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$

為  $R$  的 3 個列向量, 即  $R = \begin{pmatrix} w_{1x} & w_{1y} & w_{1z} \\ w_{2x} & w_{2y} & w_{2z} \\ w_{3x} & w_{3y} & w_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ w_3^T \end{pmatrix}$

$$\text{故 } R^{-1} = R^T = \begin{pmatrix} w_{1x} & w_{2x} & w_{3x} \\ w_{1y} & w_{2y} & w_{3y} \\ w_{1z} & w_{2z} & w_{3z} \end{pmatrix} = (w_1 \ w_2 \ w_3)$$

$$\begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ w_3^T \end{pmatrix} \mathbb{I} (w_1 \ w_2 \ w_3) = \begin{pmatrix} w_1^T \mathbb{I} w_1 & w_1^T \mathbb{I} w_2 & w_1^T \mathbb{I} w_3 \\ w_2^T \mathbb{I} w_1 & w_2^T \mathbb{I} w_2 & w_2^T \mathbb{I} w_3 \\ w_3^T \mathbb{I} w_1 & w_3^T \mathbb{I} w_2 & w_3^T \mathbb{I} w_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{其中 } w_i^T \mathbb{I} w_j = \mathbb{I}_j w_i^T w_j = \mathbb{I}_j \vec{w}_i \cdot \vec{w}_j = \mathbb{I}_j \delta_{ij}$$

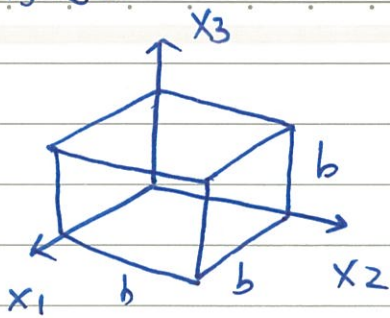
$$\text{故 } \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ w_3^T \end{pmatrix} \mathbb{I} (w_1 \ w_2 \ w_3) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_3 \end{pmatrix} \text{ 被對角化!}$$

其中  $R \mathbb{I} R^{-1}$  為所謂之 Similar transformation, 表示  $R \mathbb{I} R^{-1}$  與  $\mathbb{I}$  相似。

例七:

例四之量可以上体'式

对角化。



$$I = \beta \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

其本徵值滿足

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - I \end{vmatrix} = 0$$

由此可得  $(\frac{11}{12}\beta - I) \left[ (\frac{2}{3}\beta - I)^2 - \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{\beta}{4}(\frac{2}{3}\beta - I) \right] = 0$

$$\therefore I_2 = \frac{11}{12}\beta, \quad I_3 = \frac{11}{12}\beta, \quad I_1 = \frac{\beta}{6}$$

与例六之结果一致。

本徵向量:  $I_1 = \frac{\beta}{6}$

$$\beta \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \frac{\beta}{6} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}w_x - \frac{1}{4}w_y - \frac{1}{4}w_z = 0 \quad \text{由此, 可得 } w_x = w_y = w_z$$

$$-\frac{1}{4}w_x + \frac{1}{2}w_y - \frac{1}{4}w_z = 0 \quad = 1 = 1 = 1$$

$$-\frac{1}{4}w_x - \frac{1}{4}w_y + \frac{1}{2}w_z = 0 \quad \text{故 } \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$



$I_2 = I_3 = \frac{11}{12} \beta$  為簡併本徵值, 此時

$$\beta \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \frac{11}{12} \beta \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

可得  $\frac{1}{4} \omega_x - \frac{1}{4} \omega_y - \frac{1}{4} \omega_z = 0$

取  $\omega_z = 0$ ,  $\omega_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\omega_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\vec{\omega}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{\omega}_3 \perp \vec{\omega}_2$ , 故  $\frac{1}{\sqrt{2}} \omega_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_y = 0 \therefore \omega_x = -\omega_y$

故  $\omega_z = -2\omega_x$

$$\vec{\omega}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} = R^T = (\vec{\omega}_1 \ \vec{\omega}_2 \ \vec{\omega}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

與例六之結果一致。

註:  $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$  之選擇並不唯一 (如

所對應到的是座標轉之過程並不唯一

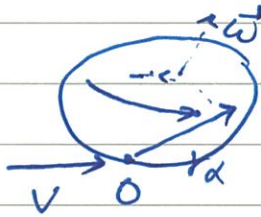
只要最後的主軸一樣即可。

上述之推導中，可以清楚地看到本徵向量之正交性是如何幫助對角化！

### 動能與轉動慣量

除了角動量  $\vec{L} = I\vec{\omega}$  外，動能也可以  $\vec{v}$  及  $\omega$  表示。

如果一個剛體 (或物體) 瞬間對其某一點 (如  $O$ )



作  $\omega$  旋轉，若  $O$  之平動速度為  $\vec{v}$ ，則

$$\vec{v}_\alpha = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha$$

則動能  $T = \sum \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2$

$$= \sum \frac{1}{2} m_\alpha [v^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha + (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} M v^2}_{\text{平移動能}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{\omega} \times \sum m_\alpha \vec{r}_\alpha}_{M \vec{R}_{CM}} + \underbrace{\sum \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2}_{T_{rot} - (27)}$$

利用  $(\vec{A} \times \vec{B})^2 = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{B})$

$$\therefore (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 = \vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum m_\alpha \vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) = \frac{1}{2} \sum \vec{\omega} \cdot \vec{L}_\alpha$$

其中  $\vec{L}_\alpha \equiv \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha = m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)$  為相對  $O$  之角動量。



$$\sum_{\alpha} \vec{L}_{\alpha} = \vec{I} \vec{\omega}$$

故  $T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \omega_i \omega_j \dots (28)$

對主軸而言,  $T_{rot} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$

若 0 點為質心, 則  $\vec{R}_{cm} = 0$

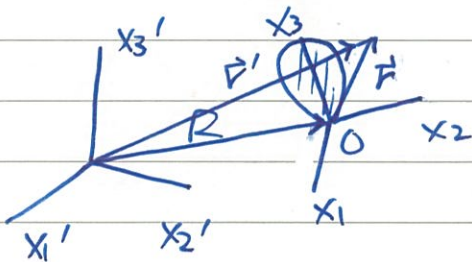
(28) 式,  $T = T_{trans} + T_{rot}$ , 即平移與

轉動完全分開。

始可 (另一種平移與轉動可分開之情形則是 0 是靜止的  
即  $\vec{v} = 0$ )

剛體的轉動 - Euler 方程式

剛體的運動包括了平移與轉動。



由能量的討論或 (9), (10) 式  
之討論可知, 若有平移運動,

則取 0 為質心時, 平移與轉動運動完全分開

即  $M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}(t)$

而  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$  (外加力矩) (P 的運動)  $\dots (29)$

其中  $\vec{L}$  為相對質心之運動, 對剛體而言,

此運動 為轉動。

因為  $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$ , 故 (29) 式似乎可以得到  $\dot{\vec{L}}$

之方程式。這樣作的困難在於 角速度隨剛

體運動而變！為了克服這個困難, Euler

採取了轉動座標, 即所謂的 body frame

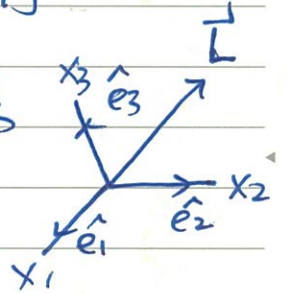
— 跟著剛體一起轉動的座標。

在此座標中,  $\vec{L}$  不隨時而變, 並且, 若取

3個 body axes 皆為轉動慣量之主軸, 則

$$\vec{L} = I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2 + I_3 \vec{\omega}_3, \text{ 其中 } \vec{\omega}_n \text{ 為}$$

$\vec{\omega}$  在  $n$  軸之投影,  $\vec{\omega}_n = \omega_n \hat{e}_n$



則根據第九單元之 (12) 式可知

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{rotating}} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad \dots (30)$$

∴ 在 rotating frame 中,  $\vec{L} = \sum_n I_n \vec{\omega}_n$  且  $I_n$

與時間無關, 故

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{rotating}} = I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + I_3 \frac{d\omega_3}{dt} \quad \dots (31)$$

如果將  $\vec{L}$  也投影到 body axes 上, 則 (29), (30), (31) 式



可得

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 &= N_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= N_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 &= N_3 \end{aligned} \right\} \dots \textcircled{32}$$

此即 Euler 方程式，為  $\omega_i$  之非線性方程式。

③ 解出之  $\vec{\omega}(t)$  為相對 body frame 之  $\vec{\omega}$  隨時變化，要進一步得到在外部固定座標之運動情形，則必須透過  $\vec{\omega}$  之 Euler angles 之關係 (④式) 得知。

當  $N=0$  時，即無外力之剛體轉動，Euler 方程式與 Lagrangian 方程式所得一致：

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 = T(\underbrace{\theta, \phi, \psi}_{\text{Euler angles}}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$$

$$\text{由 } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \quad \dots \textcircled{33}$$

$$\text{且 } \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\psi}}, \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \psi}$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi = \omega_2 \quad (\text{eg. } \textcircled{6})$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\psi}} = -\omega_1, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} = 0$$

$$\frac{d\omega_1}{d\psi} = 0, \quad \frac{d\omega_2}{d\psi} = 0, \quad \frac{d\omega_3}{d\psi} = 1$$

$$\text{故 } \frac{dT}{d\psi} = \sum_i \frac{dT}{d\omega_i} \frac{d\omega_i}{d\psi} = I_1 \omega_1 \omega_2 - I_2 \omega_2 \omega_1$$

$$\frac{dT}{d\psi} = I_3 \omega_3$$

$$\textcircled{3} \text{式} \Rightarrow \frac{d}{dt} I_3 \omega_3 - I_1 \omega_1 \omega_2 + I_2 \omega_2 \omega_1 = 0$$

$$\text{即 } I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0$$

1, 2, 3 只是代號, 將其互換 (permute) 可得其他方程式  
與 Euler 方程式  $\dot{L} = 0$  一致。

Poincaré construction: 由 Euler 方程式可知, 決定

剛體轉動之動力只取決於轉動慣量  $I_1, I_2$  及  $I_3$ 。

因此, 凡物體之  $I_1, I_2, I_3$  一樣, 其運動情形, 完全相同。Poincaré 提出, 既然如此, 而最簡單有  $I_1, I_2, I_3$  之物體幾何為橢球 (ellipsoid), 因此, 任何剛體皆可以等價之橢球表示, 這樣的建構即為 Poincaré 建構。



對稱陀螺之自由轉動

(Force-free motion of a symmetric top)

如果  $I_1 = I_2 \neq I_3$  且  $N = 0$ 

則 (32) 式

$$\Rightarrow (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 - I_1 \dot{\omega}_1 = 0 \quad \dots (34)$$

$$(I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 - I_1 \dot{\omega}_2 = 0 \quad \dots (35)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \quad \dots (36)$$

故  $\omega_3(t) = \text{常數}$ 

$$\text{故 (34) 及 (35)} \Rightarrow \dot{\omega}_1 = -\left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3\right) \omega_2$$

$$\dot{\omega}_2 = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3\right) \omega_1$$

$$\text{令 } \Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \quad \text{則} \quad \begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 &= 0 \end{aligned}$$

正如處理福科擺 (p. 9-24, eq. (23)-(24),  $\alpha=0$ ) 一樣,

$$\text{令 } z = \omega_1 + i\omega_2$$

$$\text{故 } \dot{z} = \Omega \omega_2 + i\Omega \omega_1 = i\Omega z$$

$$z(t) = A e^{i\Omega t}$$

$$\text{即 } \omega_1 + i\omega_2 = A \cos \Omega t + iA \sin \Omega t$$

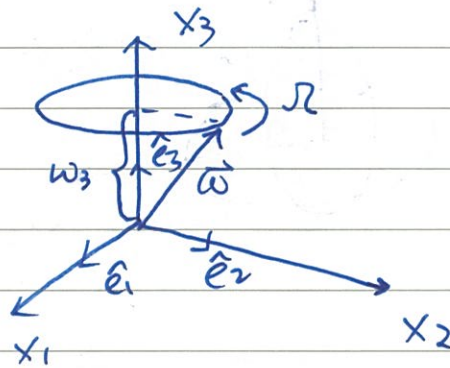
$$\text{故 } \omega_1 = A \cos \Omega t$$

$$\omega_2 = A \sin \Omega t$$

由於  $\omega_3 = \text{常數}$  故

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} = \text{常數}$$

因為  $x_1, x_2, x_3$  是附在剛體上之 3 個主軸，  
故相對於  $x_1, x_2, x_3$ ，有以下圖像



所掃出之錐形稱為 body cone.


然而完整的描述對稱陀螺之運動則必須  
相對於  $x_1', x_2', x_3'$  之固定座標描述。

此時，因為是自由轉動，故  $L$  是守恆的。

$$\begin{aligned} \text{因為 } L &= I_1 \omega_1 \hat{e}_1 + I_2 \omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \omega_3 \hat{e}_3 \\ &= I_1 (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2) + I_3 \omega_3 \hat{e}_3 \\ &= I_1 \vec{\omega} + (I_3 - I_1) \omega_3 \hat{e}_3 \quad \dots (3) \end{aligned}$$

故  $L$ ， $\vec{\omega}$  及  $x_3$  軸在同一平面。為了便起見，可以

取  $L \parallel x_3'$ ，而  $x_3$  軸則為物體之主軸，通常令

物體之幾何特徵有窮，如物體為  之形狀，  
則  $x_3$  取為平行圓柱之軸！



因為  $T = \frac{1}{2} \dot{\omega} \cdot \mathbf{L} = \text{常數}$ , 所以  $\dot{\omega}$  在  $X_3'$  ( $\mathbf{L}$ )

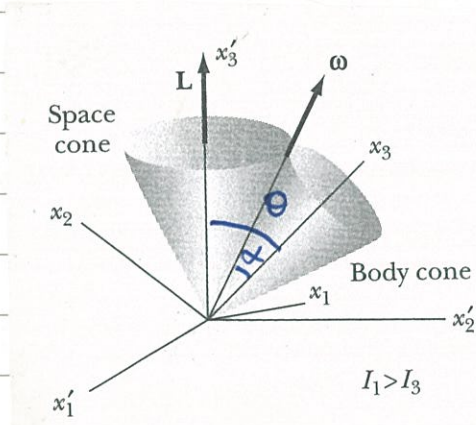
之投影是固定的。

綜合 (i)  $\dot{\omega}$  對  $X_3$  軸以  $\Omega$  轉動

(ii)  $\dot{\omega}$  在  $X_3'$  ( $\mathbf{L}$ ) 之投影固定

且  $\dot{\omega}$  及  $X_3$  對  $X_3'$  轉動角速度一樣

則  $X_3$  必須對  $X_3'$  轉動, 其可能情形有二種:



令  $\dot{\omega}$  與  $X_3$  之夾角為  $\alpha$

$X_3$  與  $X_3'$  ... ..  $\theta$

則  $\tan \theta = \frac{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}{L_3}$

由 (37) 式可知

$$L_1^2 + L_2^2 = I_1^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

$$L_3 = I_3 \omega_3$$

( $\alpha=0, \theta=0$ )

故  $\tan \theta = \frac{I_1}{I_3} \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\omega_3} = \frac{I_1}{I_3} \tan \alpha \dots (38)$

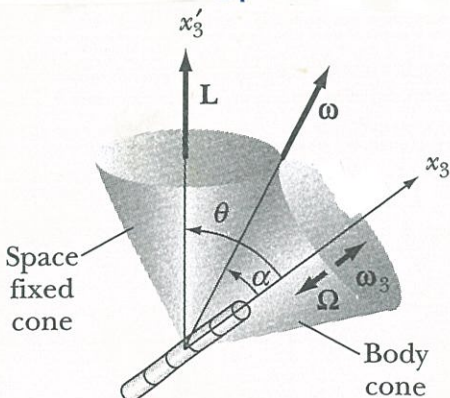
(prolate spheroid)  $\because \alpha = \text{常數}$ , 故  $\theta = \text{常數}$

(i)  $I_1 > I_3$  即圓柱沿  $X_3$  較長, 此時  $\theta > \alpha$  且

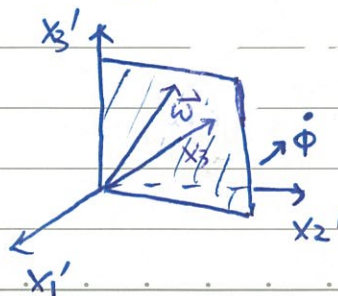
$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 < 0$$

與  $\omega_3$  反向, 故有左圖之情形 ( $\omega$  在內,  $X_3$  在外, 所以  $\Omega$  與  $\omega_3$  相反)

注意,  $\mathbf{L}, \dot{\omega}$  及  $X_3$  在同一平面, 而此



Prolate,  $I_1 > I_3$   
 $\Omega, \omega_3$  have opposite signs.

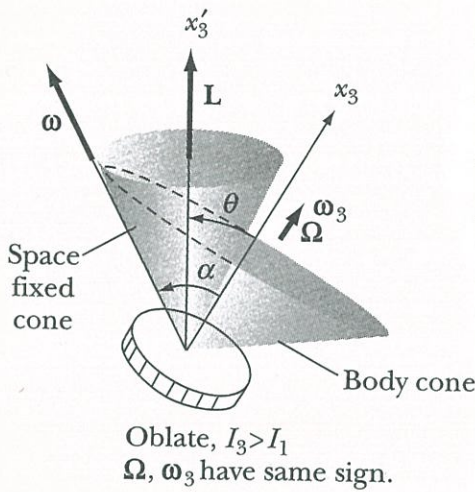


平面以  $\dot{\omega}$  對  $X_3'$

轉動 (見圖 11-P

之 b 及 c)

由(7)式可知  $I_1 > I_3$  時  $\vec{L} = I_1 \vec{\omega} + (I_3 - I_1) \omega_3 \hat{e}_3$ ,  $\vec{\omega}$  介於  $\vec{L}$  及  $\hat{e}_3$  之間, 故得圖 11-P (b)



(ii)  $I_1 < I_3$  (Oblate spheroid)

即扁形圓柱如左圖所示。

此時  $\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 > 0$

且  $\alpha > \theta$ . 此時,  $\vec{L}$  介於  $\vec{\omega}$  及  $\hat{e}_3$  之間。

從上向下看可見  $\omega$  繞  $x_3'$  轉動

故相對於  $x_3$ ,  $\omega$  以  $\odot$  轉動

與  $\Omega = 0$  之結論一致。

這兩種情形中,  $x_3$  軸皆以  $\dot{\phi}$  對  $x_3'$  轉動, 這是比較有實際圖像的結果: 剛体的主軸對  $x_3'$  以  $\dot{\phi}$  轉動。(  $\omega$  本身是一抽象的物理量, 與實際的幾何圖像無直接關係, 比較沒有圖像)

為了求  $\dot{\phi}$ , 我們需要更精確的定出 Euler

Angles。如下圖所示, 考慮某 瞬間  $\psi = 0$  之 因為

$\psi = 0$  (如左下圖)

或圖 11-P)

則由(6)式可得

$\omega_1 = \dot{\theta}$

$\omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta$  ... (39)

$\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$

故  $\dot{\phi} = \frac{\omega_2}{\sin \theta} = \frac{\omega \sin \alpha}{\sin \theta}$



$$\therefore L \sin \theta = L_2 = I_2 \omega_2 = I_2 \omega \sin \alpha$$

$$\text{故 } \frac{\omega \sin \alpha}{\sin \theta} = \frac{L}{I_2} = \frac{L}{I_1}$$

$$\therefore \dot{\phi} = \frac{L}{I_1}$$

如為  $\psi=0$  那-瞬間之  $\phi$  之值。

對一般  $\psi$  而言，由於  $\theta$  固定， $\dot{\theta}=0$ ，(6)式

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \omega_1^2 + \omega_2^2 &= \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \\ \underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{I}^2 \text{ 常數}} & \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{常數}} \end{aligned}$$

$$\text{故 } \dot{\phi} = \text{常數} = L/I_1 \quad \text{--- (40)}$$

此時，由  $\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \text{常數}$  可推知， $\dot{\psi}$  亦為常數。

若以  $\omega$  表示，則由 (39) 式可得

$$\frac{\sin \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} = \frac{I_1}{I_3} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}, \text{ 即 } I_3^2 \sin^2 \theta - I_3^2 \sin^2 \theta \sin^2 \alpha, \text{ 除以 } \sin^2 \theta$$

$$= I_1^2 \sin^2 \alpha - I_1^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \theta$$

$$\text{可得 } I_3^2 \cos^2 \alpha = I_1^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \theta} - I_1^2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{故 } I_1^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \theta} = I_1^2 + (I_3^2 - I_1^2) \cos^2 \alpha, \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} = \sqrt{1 + \left(\frac{I_3^2}{I_1^2} - 1\right) \cos^2 \alpha}$$

$$\text{故 } \dot{\phi} = \omega \left[ 1 + \left(\frac{I_3^2}{I_1^2} - 1\right) \cos^2 \alpha \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{--- (41)}$$

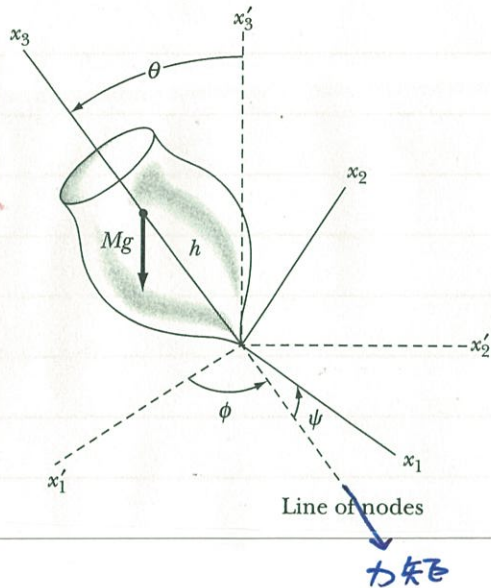
例：地球之幾何對稱軸之  $\omega$  之值  $\approx 0.2 \text{ sec}$ ， $\frac{I_3}{I_1} \approx 1.00329$

$$\Rightarrow \dot{\phi} \approx 1.00329 \omega, T = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{1}{1.00329 \omega} \approx 0.997 \text{ 天}$$

註：3600 sec = 1 degree =  $\frac{\pi}{180}$  radians,  $\therefore$  1 arc second =  $\frac{\pi}{180 \times 3600}$  radian

## 一桌固定之对称陀螺 (symmetric top) 的运动

如左下图所示，一个常见的现象是一个对称陀螺桌在重力场下的运动。



此时，因为陀螺顶端固定不动，可以取固定座标之原点与转动座标之原点重合。

对称陀螺之  $I_1 = I_2 \neq I_3$ ，我们取  $x_3$  与  $x_1$  之轴重合如左图所示。

因为  $\dot{r} = 0$ ，故对称陀螺只有转动动能之动能

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2)$$

$$= \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \quad \dots (42)$$

利用 (4) 式，可知

$$\omega_1^2 = (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2$$

$$\omega_2^2 = (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2$$

$$\text{故 } \omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2$$

加上  $\omega_3^2 = (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$ ，故  $T$  可以以 Euler angles 表示，

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad \dots (43)$$

$$\therefore U = Mgh \cos \theta$$

$$\text{故 } L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgh \cos \theta \quad \dots (44)$$



與 (42) 式相比,

(44) 式才是以清楚描述陀螺的運動。

(因為  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  並沒有清楚幾何上的意義)

由 (44) 式, 立刻可知  $L$  與  $\phi$  及  $\psi$  無關, 故

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = \text{常數} \dots (45)$$

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = \text{常數} \dots (46)$$

即  $I_3 \omega_3 = P_\psi = \text{常數}$

因此, 只有  $P_\phi$  會改變, 這<sup>也</sup>一點可以由重力  $FG$  產生之力矩是沿著 line of node (上頁的圖) 可以直接得到。

由 (46) 及 (45) 可以將  $\dot{\psi}$  及  $\dot{\phi}$  以  $P_\phi, P_\psi$  表示:

$$(46) \text{ 式} \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{P_\psi - I_3 \dot{\phi} \cos \theta}{I_3} \text{ 代入 (45) 式}$$

$$\text{可得} \quad (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + (P_\psi - I_3 \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta = P_\phi$$

$$\therefore I_1 \sin^2 \theta \dot{\phi} = P_\phi - P_\psi \cos \theta$$

$$\dot{\phi} = \frac{P_\phi - P_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \dots (47)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{P_\psi - I_3 \dot{\phi} \cos \theta}{I_3} \\ &= \frac{P_\psi}{I_3} - \frac{(P_\phi - P_\psi \cos \theta) \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \dots (48) \end{aligned}$$

利用 (47) 及 (48) 式 及

$$E = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + Mgh \cos \theta = \text{常數} \quad (49)$$

(我們) 最後可化簡為一個變數  $\theta$  的問題：  
得問題

由 (46) 式,  $I_3 \omega_3 = P\dot{\phi}$ ,  $\omega_3 = \frac{P\dot{\phi}}{I_3}$

$$(49) \text{ 式} \Rightarrow E - \frac{P\dot{\phi}^2}{2I_3} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_1 \sin^2 \theta \left[ \frac{P\dot{\phi} - P\dot{\phi} \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \right]^2 + Mgh \cos \theta$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{E' \text{ (常數)}} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{V(\theta)}$

故  $E' = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V(\theta)$  只與  $\theta$  有關。 -- (50)

其中  $V(\theta) = \frac{(P\dot{\phi} - P\dot{\phi} \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mgh \cos \theta \quad \dots (51)$

為等效位能。 ~ 離心力位能 ( $\frac{L^2}{2I}$ )

原則上, 由 (50) 式出發, 可得

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2(E' - V(\theta))}{I_1}} \quad (\text{取正負})$$

故  $t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1}(E' - V(\theta))}}$  由此解出  $\theta(t)$ ,

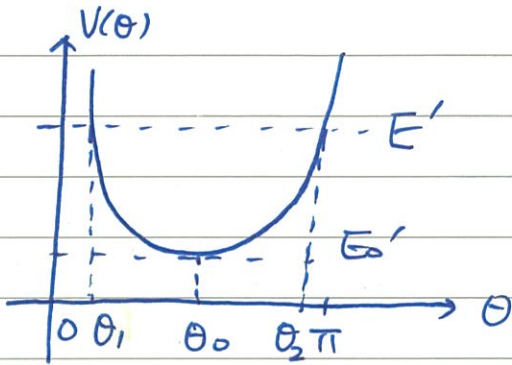
再由 (47) 式解出  $\phi(t)$  及 (48) 式解出  $\psi(t)$ 。

$\theta(t)$ ,  $\phi(t)$  及  $\psi(t)$  可完整描述陀螺之運動。



以上的分析可以精確的解  $\theta(t)$ ,  $\phi(t)$  及  $\psi(t)$ ,  
比較沒有物理圖像。

定性的圖像可由  $V(\theta)$  得到如下: 一般而言,  $P_\phi, P_\psi \neq 0$



當  $\theta \rightarrow 0$  或  $\pi$  時,  $\phi \rightarrow \infty$ , 數學上  
 $\therefore \sin^2 \theta \rightarrow 0^+$ , 故由 (5) 式  
 可知  $V(\theta) \rightarrow \infty$   
 因此,  $\theta$  的範圍在  $\theta_1 < \theta < \theta_2$   
 之間。

只有當  $E = E_0'$  時,  $\theta = \theta_0$  是固定的之外,  $\theta$  在  $(\theta_1, \theta_2)$   
 間震動, 即陀螺上上下下的擺動, 稱為章動  
 (nutation)

當  $\theta = \theta_0$  時, 則稱為進動 (precession)

Precession without nutation: 此時  $E = E_0'$ ,  $\theta = \theta_0$ ,  $\dot{\theta} = 0$

精確的來說,  $\frac{dV}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0$  決定了  $\theta_0$

$$\text{故 } \frac{-\cos \theta_0 (P_\phi - P_\psi \cos \theta_0)^2 + P_\psi \sin^2 \theta_0 (P_\phi - P_\psi \cos \theta_0)}{I_1 \sin^3 \theta_0} - Mgh \sin \theta_0 = 0$$

(若  $\theta_0 = 90^\circ$ , 則  $P_\psi P_\phi = mgh I_1$ )

$$\text{令 } \beta = P_\phi - P_\psi \cos \theta_0$$

$$\text{則 } \cos \theta_0 \beta^2 - P_\psi \sin^2 \theta_0 \beta + Mgh I_1 \sin^4 \theta_0 = 0 \quad \dots (52)$$

$$\text{故 } \beta = \frac{P_\psi \sin^2 \theta_0}{2 \cos \theta_0} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Mgh I_1}{P_\psi^2} \cos \theta_0} \right) \quad \dots (53)$$

$$\because \beta \text{ 為實數}, \therefore 1 - \frac{4MghI_1}{P_\varphi^2} \cos^2 \theta_0 \geq 0$$

$$\text{即 } P_\varphi^2 \geq 4MghI_1 \cos^2 \theta_0$$

由  $P_\varphi = I_3 \omega_3$ , 可得  $\omega_3$  中須滿足

$$\omega_3 \geq \frac{2}{I_3} \sqrt{MghI_1 \cos^2 \theta_0} \quad \dots (54)$$

才能有穩定的 precession 運動。

注意：上面的推導並不表示有 2 個  $\theta_0$ 。在 (52) 式  
中只有  $\theta_0$  的解。

(53) 式中之  $\pm$  號對應對的是 2 個不同中之

轉速：

由 (45) 及 (46) 式可得

$$\begin{aligned} \beta &= P_\varphi - P_\varphi \cos \theta_0 \\ &= (I_1 \sin^2 \theta_0 + I_3 \cos^2 \theta_0) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta_0 \\ &\quad - I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta_0) \cos \theta_0 \\ &= I_1 \sin^2 \theta_0 \dot{\phi} \quad (\text{即 (41) 式}) \end{aligned}$$

$$\therefore \dot{\phi} = \frac{\beta}{I_1 \sin^2 \theta_0} \quad \text{故 由 (53) } \dot{\phi} \rightarrow \dot{\phi}_\pm$$

其中  $\dot{\phi}_+$  為較快的運動，而  $\dot{\phi}_-$  則是

較慢之運動。當  $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ ,  $\pm$  有相同符之

$$\cos \theta_0 < 1 \quad \sqrt{\dots} \quad \text{由 (53) } < 1$$



進動，而當  $\theta_0 > \pi/2$ ，± 之進動方向相反！

對  $\theta_0 < \pi/2$  而言，當  $\omega_3 \gg \frac{2}{I_3} \sqrt{MghI_1 \cos\theta_0}$

(fast top)，利用  $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$  ( $x \ll 1$ )，

由 (5) 式可得

$$\beta^+ \approx \frac{P_{\omega} \sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0}, \quad \therefore \dot{\phi}_+ \approx \frac{P_{\omega}}{I_1 \cos \theta_0} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos \theta_0}$$

(fast precession)  
見後

$$\beta^- \approx \frac{P_{\omega} \sin^2 \theta_0}{2 \cos \theta_0} \times \frac{2MghI_1 \cos \theta_0}{P_{\omega}^2}$$

$$= \frac{MghI_1}{P_{\omega}} \sin^2 \theta_0, \quad \therefore \dot{\phi}_- \approx \frac{Mgh}{P_{\omega}} = \frac{Mgh}{I_3 \omega_3}$$

(slow precession)

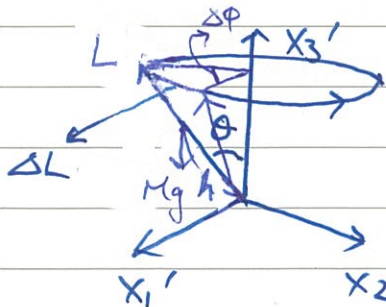
其中  $\dot{\phi}_-$  比較常見，其物體圖像為

所謂的 Gyroscope effect (陀螺儀效應) 可以

以力矩直接了解如下：

觀念

當  $\omega_3$  甚大時， $I_3 \omega_3 \approx L$ ，即  $\omega_3$  主宰了角動量。



$$\therefore \text{力矩 } \tau = Mgh \sin \theta$$

$$\text{且 } \vec{\tau} \perp \vec{L}$$

$$\text{故 } \Delta \vec{L} = \vec{\tau} \Delta t \perp \vec{L}$$

當  $\Delta t \rightarrow 0$  時， $\Delta \phi \rightarrow 0$  (如左上圖)

$$\text{故 } \Delta L = L \sin \theta \Delta \phi, \quad \therefore \tau \Delta t = Mgh \sin \theta \Delta t$$

$$\text{由 } \Delta L = \tau \Delta t \text{ 可得 } \dot{\phi} = \frac{Mgh}{L} = \frac{Mgh}{I_3 \omega_3}$$

而  $\dot{\phi}$  則對應到對稱陀螺之自由轉動

(即重力可被忽略) : 由 (40) 式  $\dot{\phi} = \frac{L}{I_1} = \frac{L \cos \theta_0}{I_1 \cos \theta_0}$

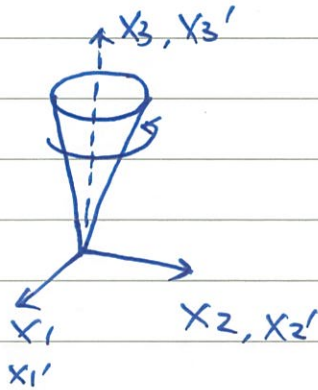
$$= \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos \theta_0} \quad (L \cos \theta_0 \text{ 為 } L \text{ 在 } X_3 \text{ 之投影, 為 } I_3 \omega_3)$$

例: (54) 式 應用之 - 為  $\theta_0 = 0$

此時 (52) 式 可得  $\beta > 0$ , 即  $P_\phi = P_\psi$

因此, 若  $X_3$  與  $X_3'$  重合, 即陀螺垂直向上,  $\phi = 0$ .

$\psi = 0$ ,  $\omega_3 = \omega > \frac{2}{I_3} \sqrt{MgIh}$ , 陀螺可維持



垂直向上不動。

實際上, 摩擦力會使  $\omega_3$  逐漸  
變小, 而小於  $\frac{2}{I_3} \sqrt{MgIh}$ 。

此時,  $\theta_0 = 0$  不再是穩定的解, 陀螺開始倒下。

### Precession with nutation (章動式進動)

對一般  $E'$  而言,  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ , 陀螺作章動式

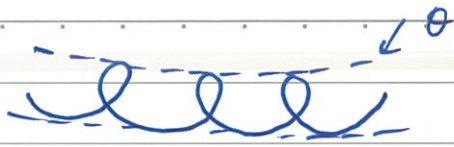
進動。此時, 可依據  $\dot{\phi} > 0$  或  $\dot{\phi}$  可變号

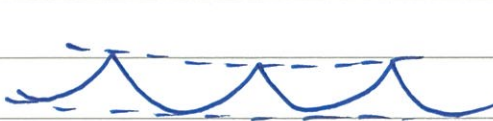
(在  $\theta_1$  處) 分為三種方式



$\dot{\phi} > 0$



(ii)  在  $\theta = \theta_1$  時,  $\dot{\phi}$  變号

(iii)  在  $\theta = \theta_1$  時,  $\dot{\phi} = 0$   
 $\therefore \theta_1$  為轉折點, 故  $\dot{\theta} = 0$

由 (4) 式可知  $P\dot{\phi} - P\dot{\phi}\cos\theta_1 = 0$ , 即  $\cos\theta_1 = P\dot{\phi}/P\dot{\phi}$

例: Approximation solution of nutation (續)

完整 章動的解很複雜, 若只要半

定量的了解, 可以由 (4) 式出發

$$I_1 \sin^2 \theta \dot{\phi} + \underbrace{(I_3 \cos \theta \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi})}_{P\dot{\phi} = I_3 \omega_3} \cos \theta = P\dot{\phi} \quad \text{--- (55)}$$

$\frac{d}{dt}$  (55), 只保留  $O(\dot{\phi})$  及  $O(\dot{\theta})$ , 忽略  $(\dot{\phi})^2, \dot{\phi}\dot{\theta}$  等

$$\Rightarrow I_1 \sin \theta \dot{\phi} = I_3 \omega_3 \dot{\theta} \quad \text{--- (56)}$$

由  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$  可得

$$I_1 \ddot{\theta} = [Mgh - I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})] \sin \theta$$

(drop  $I_1 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta$ )

$$= [Mgh - I_3 \omega_3 \dot{\phi}] \sin \theta \quad \text{--- (57)}$$

$$\sum \frac{I_3 \omega_3}{I_1} = \omega_e, \quad \frac{Mgh}{I_3 \omega_3} = \omega_p$$

則由 (6) 式  $\Rightarrow \sin \theta \dot{\phi} = \omega_e \dot{\theta} \dots (58)$

由 (57) 式  $\Rightarrow \ddot{\theta} = \omega_e (\omega_p - \dot{\phi}) \sin \theta \dots (59)$

由  $\frac{d}{dt}$  (58) 可得  $\cancel{\cos \theta \ddot{\phi}} + \sin \theta \frac{d^2}{dt^2} \phi$   
higher order

$$= \omega_e \ddot{\theta} = \omega_e^2 (\omega_p - \dot{\phi}) \sin \theta$$

↑  
(59) 式

故  $\frac{d^2}{dt^2} \phi + \omega_e^2 \phi = \omega_e^2 \omega_p \dots (60)$

故  $\phi(t) = \omega_p + A \cos(\omega_e t + \alpha)$

取  $t=0$  使得  $\alpha=0$ , 令  $\theta(t=0) = \theta_0$ ,  $\dot{\theta}(t=0) = 0$   
 $\dot{\phi}(0) = \omega_0$ ,  $\phi(0) = 0$

則  $\phi(t) = \omega_p - (\omega_p - \omega_0) \cos \omega_e t$

$$\dot{\phi}(t) = \omega_p t - \frac{\omega_p - \omega_0}{\omega_e} \sin \omega_e t$$

由 (60) 可知 當  $\omega_0 = 0$  時  $\dot{\phi} = 0$  at  $t=0$

故得



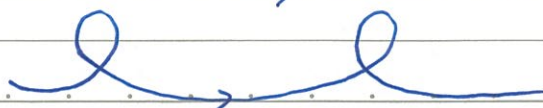
$$\omega_0 = 0$$

其他  $\omega_0$  值  
如右



$$\omega_0 = \frac{\omega_p}{2}$$

$$\omega_0 = \omega_p (\dot{\phi} \rightarrow \dot{\phi}_-)$$



$$\omega_0 = 3\omega_p$$

→  $\phi$



## 自由轉動的穩定性

轉動物件之穩定性有實際的應用，

如 衛星之穩定性，子彈轉動後之穩定性，  
轉動

所以有必要加以分析。

這裏的穩定指得微小的擾動下，物體  
仍能回到 <sup>在</sup> 之前的運動狀態，最多只作小  
幅振盪。

假設  $I_3 > I_2 > I_1$ ，

(i) 物體 對  $X$  軸 轉動

則  $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1$ ，微擾後  $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \lambda \hat{e}_2 + \mu \hat{e}_3$

則 (32)式 ( $N_1 = N_2 = N_3 = 0$ ) 可得

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \mu \lambda = 0 \quad \text{--- (61)}$$

$$I_2 \dot{\lambda} + (I_1 - I_3) \omega_1 \mu = 0 \quad \text{--- (62)}$$

$$I_3 \dot{\mu} + (I_2 - I_1) \omega_1 \lambda = 0 \quad \text{--- (63)}$$

精確到  $O(\lambda)$ ,  $O(\mu)$ ，可得  $\mu \lambda$  視為 0，

故  $I_1 \dot{\omega}_1 = 0$   $\omega_1 = \text{常數}$

$$\begin{aligned} \text{由 (62) 式 可得 } \dot{\lambda} &= -\frac{I_1 - I_3}{I_2} \omega_3 \mu \\ &= -\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} \omega_1^2 \lambda \equiv -(\Omega_{\lambda})^2 \lambda \\ &> 0 \end{aligned}$$

故  $\lambda$  ( $\mu$ ) 做小 幅振盪, 對  $X_1$  軸

之轉動是穩定的!

(ii) 對  $X_2, X_3$  軸之轉動

同理, 對  $X_2$  軸轉動, 只要符

$1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$  即可

$$\text{故 } \frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} \omega_1^2 \rightarrow \frac{(I_2 - I_1)(I_2 - I_3)}{I_3 I_1} \omega_2^2 < 0$$

對  $X_3$  軸轉動,  $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2$

$$\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} \omega_1^2 \rightarrow \frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2} \omega_3^2 > 0$$

因此, 只有沿著最大或最小轉動慣量軸<sup>之</sup>轉動才穩定, 而沿著中間大小之轉動慣量軸旋轉不穩定! (Tennis Racket theorem)

若  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , 則 (63) 式中  $\dot{u} = 0$

$$u = \text{常數}, \text{則 (62) 式} \Rightarrow \dot{\lambda} = -\frac{I_1 - I_3}{I_2} \omega_1 u = \text{常數}$$

$\lambda = A + Bt$  非振盪形式

故對  $X_1$  軸轉動不穩定。

同理, 對  $X_2$  軸轉動  $\omega_3 = \text{常數} (\equiv \lambda)$ ,  $u = A + Bt$  亦不穩定

$$\text{而對 } X_3 \text{ 軸, } \omega_3^2 \text{ 仍為 } \frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2} \omega_3^2 = \frac{(I_3 - I_1)^2}{I_1 I_2} \omega_3^2 > 0$$



故對  $X_3$  轉動是穩定的!

以上的組態 實際例子為子彈，  
子彈的發射常仿隨對中心軸之  
旋轉，其目地即使其穩定。

注意：穩定之前提為  $\omega_3 \neq 0$ ，如果  $\omega_3 = 0$   
以上分析皆不成立 (即不轉動)

物體運動並不穩定!

最後，當  $I_1 = I_2 = I_3$  時，任意擾動皆會  
改變  $\omega$ ，故此時轉動不穩定。

與 rotating 有關的玩具: tippie-top



gyroscope