

二. Newtonian Mechanics (single-particle)

在那邊效 分物體運動有關之量 ($\vec{v}, \vec{a}, \vec{r}, \dots$) 中

牛頓的貢獻在於指出我們日常生活中對力的
經驗或^{物體間}交互作用的經驗可以總結為只
與加速度有關

- * 如果一個物體與其他物體完全
隔絕, 沒有交互作用 (interaction)
則維持靜止或等速度運動

Newton's 1st law: A body remains at rest
or in uniform motion unless acted
upon by a force

- * 物體受合力大小 = 動量之變化

Newton's 2nd law: A body acted upon by
a force moves in such a
manner that the time rate
of change of momentum
equals the force.

即 $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$ if $m = \text{const.}$

- * 作用力與反作用力同時存在, 並且大小相等, 方向相反

Newton's 3rd law: If two bodies exert forces on
each other, these forces are equal in magnitude
and opposite in direction.

牛頓第一及第二定律來自實驗上的驗證：

考慮二個“孤立的物 件” 互相交互作用，

實驗上發現，二物 件之加速度 a_1 與 a_2 方向

相反，且 $\frac{a_1}{a_2} = k_{12}$ 與 交互作用之
比例

性質無關。∴ a_1/a_2 為 2 物 件之特性

更進一步的實驗發現，對 3 個物 件

而言， $k_{12} k_{23} k_{31} = 1$ — — — ①

其 k_{ij} 為 將 i 與 j 單獨拿出做實驗所得
物 件

之加速度比。

因為，由定義 $k_{ij} = \frac{1}{k_{ji}}$

①式表示 $k_{ij} = \frac{m_j}{m_i}$ m_i 為 i 物 件之特性

m_i 即 所謂之慣性質量 (inertia mass)

與速度等無關

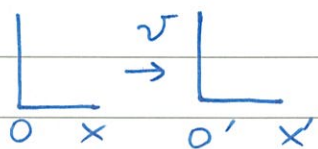
慣性座標 (inertia frames)

牛頓運動定律的成立必須在所謂慣性座標，否則如果座標系本身有加速度，不受力的物體並不會靜止或維持等速運動，這是所謂假力現象。

那什麼是慣性座標呢？

* 首先，有無限多個慣性座標，只要彼此相對速度 固定即可。

此即 Galilean invariance



$$x = x' + vt$$

$$t' = t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2}$$

* 實際的慣性座標怎麼取呢？

首先，地球上^{實驗室}是一個好近似，但地球在自轉。下一個好的近似是太陽，但雖然太陽相對鄰近的星球不動，還是繞著銀河系中心運動。

因此，最後，似乎無可避免的選取

遠于固定不動的恆星或宇宙之平均運動座標。
物質

慣性座標的選取衍生許多重要問題

牛頓力學

牛頓本身也想到，運動是相對的，inertial frames 沒有加速度，沒有轉動，是相對那一個座標呢？

牛頓的答覆是有 absolute space 及 absolute time 的存在。Absolute space 獨立於 物體之外，所謂的加速是否是相對於 absolute space！

(見 page 2-5)

既然有 Absolute space，則 to space 是眾多的 inertial frames 唯一靜止的。

相對此空間，物體皆有

慣性，即 在沒外力時，物體有慣性

拒絕加速！

絕對空間的概念表示當我們把宇宙所有東西都致開，只剩一個物體時，讓此物體加速需要施力 $F=ma$ ！(在絕對空間)

牛頓力學的問題, Mach's principle 與 廣義相對論

~~牛頓~~絕對空間產生許多批評，首先，因為 inertial frames 中所測之力皆相同，如果決定那一個是 absolute space 呢？牛頓無法回答此問題。

第二：絕對空間讓物件有抵抗加速之能力（慣性）但卻與物件脫鉤，物件沒有反作用在空間座標上，這種可以作用在物件而不允許物件反作用回來，能與相合的空間很難

第三：慣性座標的選取最後無可避免的是與宇宙物質有關！

所以相對慣性座標的加速成為相對宇宙物質的加速！

慣性的來源與宇宙其他物質的存在有關！

因此，當整個宇宙是空的只剩一個物件時，慣性還存在嗎？

歷史上, Leibniz 與 Berkeley 就有第3案之
質疑, 他們認為當所有宇宙之物質都移
開, 只剩二個物體後, 如何判斷他
們是否互相旋轉?

頓的做法是在二物體運動線上加一彈
簧, 並稱可以測出彈簧之伸長, 而 Leibniz
與 Berkeley 則稱不會伸長。
聲彈簧

一直到了 1872, Mach 更明確的聲稱 “不
是絕對加速度決定物體的慣性, 而是相對
宇宙之加速度 !

因此, 宇宙的物質的分佈決定了物體的
慣性 ...

這個想法啟發了 Einstein, 最後^{成功時}發展出他的
廣義相對論: 宇宙的物質分佈決定

了時間與空間 (space and time) 之幾何
之幾何

(空間與時間決定物質的運動)

是 (Einstein 第一個稱為 Mach's principle)
將 Mach 的想法

慣性質量 動質量 的等價原理

(principle of equivalence)

如果物體的慣性源自其他物體的存在，表示慣性源自物體與其他物體之相互作用，則造成慣性的作用是什麼呢？

依照所知道的作用，應該是重力。

則依照 Mach's principle, 一個物體相對宇宙其他物體加速^(a)時，其他物體對它所產生之力

$$\propto ma$$

簡單的模型 (如假設宇宙的質量分佈

是均勻的) 確實可以造成 $F \propto ma$:

參考:

靜重力 = 0

①
m

$$\frac{G M m}{r}$$

重力波 (類似電磁波)

$$= \frac{G m M a}{c^2 r}$$

⇓

$$\frac{g_1 g_2}{4\pi G r c^2} a$$

$$F = \int \frac{G M a m}{c^2 r} dV = \frac{4\pi G m a \rho_{gal}}{c^2} \int_0^R \frac{r^2}{r} dr$$

$$\propto ma$$

但如果宇宙質量分佈不均勻，局部慣性的改變是存在的，特別在大質量附件！

目前實驗上並未發現！ (見 Gravitation and cosmology by Steven Weinberg)

Einstein 的理論是介乎 Mach 與 Newton 之間

首先,他先區分慣性質量與重力質量:

慣性質量: mass that determines the acceleration of a body under the action of a given force $m_I a$

重力質量: mass as a source to generate ^{the} gravitation force $m_g \vec{g}$

實驗上 (Galileo 與 ^{10⁻⁹} Leo Eötvös) 採 = 個不同之材質的物體在重力下加速 $F = m_g \vec{g} = m_I \vec{a}$

來測量 $\frac{a}{g}$ 是不是一樣.
" m_g/m_I

由秤決定 ω
 $\omega = m_g \vec{g} = k \Delta x$ 

實驗的結果是一樣的! $\therefore$ 所有的物體 $m_I = m_g$
(取比例常數 = 1)

此為 等價原理 (principle of equivalence)

等價原理給出慣性座標 (局部) 明確的定義:

局部 free fall (自由落下, 即 $a =$ 當地之 $\vec{g}$ 的

座標) 座標 = 局部慣性座標, 以牛頓之語言來看,

$$\therefore m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{F}_{ng} \quad \vec{F}_{ng} = \text{non-gravitational force}$$

$\therefore$ 在 free fall 座標中 $m(\vec{a} - \vec{g}) = \vec{F}_{na}$, $\vec{a}'$ 為 free

-fall 中所測之加速度, 因此在 $\vec{a}' \rightarrow$ 此座標中, 動者恆動, 靜者恆靜


換句話說，所有局部 free-fall 座標中

物理定律 的形式 在 沒有重力

的時候之形式一樣 (如為所謂的 The strong Principle of Equivalence)

而如何決定局部 $\vec{g}$ 呢？以及 將相對論

整合進去，則是廣義相對論的內容，在此不予

進一步討論。 (由於局部座標之 $\vec{a} = \vec{g}$ 與 test particle 之質量無關，可以想像 free-fall 座標

以下我們皆從牛頓定律出發，探討其 完全由物質 分佈決定！

所處理的問題

運動方程式 (Equation of Motion)

牛頓定律: $\vec{F} = m\vec{a}$ 但並未描述
力, $\vec{F}$, 的本質

不同的力, $\vec{F}$ 與 $\vec{x}$, $\vec{v}$ 之關係不同

稱為力定律.

一旦力知道了, $m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$

形成一微分方程式, 稱為運動方程式.

因此, 要找出 $\vec{r}(t)$, 即必須求微分方程式之解。

以單變數 ($\vec{r} \rightarrow x$) 而言, 運動方程式屬於

以下一般形式的微分方程式

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$$

最高微分為 2 次, 故為 2 階微分方程式。

如果最高微分項是 n 次則為 n 階 " " " "。

$$\text{由於 } \frac{d}{dt}(\text{常數}) = 0, \therefore \frac{d}{dt}(x+c) = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x+a_1t+b) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^3}{dt^3}(x+a_1t^2+a_2t+a_3) = \frac{d^3x}{dt^3}$$

...

故上來說，

No.

Date

2-12

因此滿足方程式的“一般解”中，允許 n 個
任意的常數。

以牛頓力學來說， $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$

則一般解可以有 2 個 未定常數。

這 2 個 未定常數 可取為 起 始

條件： $x(t=0)$ 及 $v(t=0) = \dot{x}(0)$

我們可以從數值解 $m\ddot{x} = F$ 來理解：

$$\text{給定 } x(0), \dot{x}(0), \quad \int_0^{\Delta t} m\ddot{x}(t) dt = \int_0^{\Delta t} F(x, \dot{x}, t) dt$$

$$\Rightarrow m(\dot{x}(\Delta t) - \dot{x}(0)) \simeq F(x(0), \dot{x}(0), t) \Delta t + o(\Delta t^2)$$

$\therefore$ 可求出 $\dot{x}(\Delta t)$

$$\text{又 } x(\Delta t) = x(0) + \dot{x}(0) \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{x}(0) + \dots$$

$$\sim x(0) + \dot{x}(0) \Delta t + o(\Delta t^2)$$

$\therefore x(\Delta t)$ 及 $\dot{x}(\Delta t)$ 可由 $x(0)$ 及 $\dot{x}(0)$ 求出，

如此反覆下去，可得 $x(2\Delta t), \dot{x}(2\Delta t), \dots$

其誤差為 $O(\Delta t^2)$ ，因此， $\Delta t \rightarrow 0$ 時，誤差 $\rightarrow 0$ 。

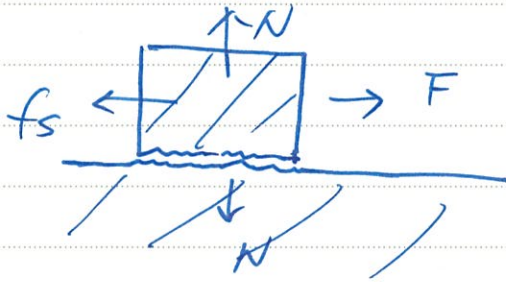
由此可知， $x(0)$ 及 $\dot{x}(0)$ 決定了 $\ddot{x}(0)$ ，進而決定 $x(\Delta t)$ ，
 $x(2\Delta t) \dots$

這個圖像 很清楚地說明了 n 階微分方程
中有 n 個待定的常數!

Examples:

例 1. 物體所受的阻力/摩擦力

* 固體/固體間 $\Rightarrow$ 摩擦力



$$f_s \propto \text{Contact area} \\ \propto N$$

$$f_s = \mu_s N \quad \text{for static}$$

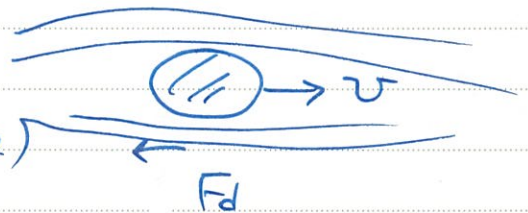
$$= \mu_k N \quad \text{when moving}$$

$$\mu_k < \mu_s$$

* 固體/流体: 阻力

(Drag force)

Stoke's law: small v

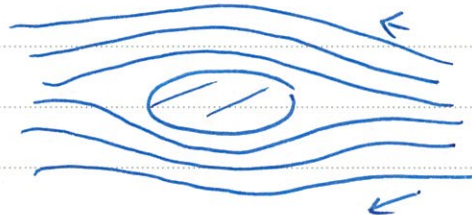


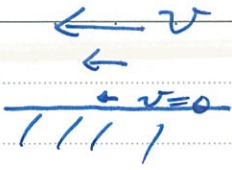
$$\vec{F}_d = -\eta K \vec{v}$$

$$(-6\pi\eta R v)$$

大致的理由是: 小 v 時,

此時流体呈層狀流動





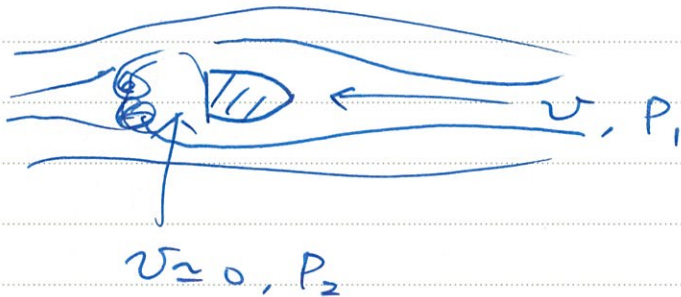
在物體邊界, $v=0$ (due to friction)

所以流體的動量由 mv 變為 0, 其動量的損失

給了物體, 故 $F_d \propto -v$!

for large v , $\vec{F}_d = -mkv^2 \hat{v}$ (Newton)

其大致的原因: 流體的慣性:
因為



Bernoulli: $\frac{1}{2}\rho v^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho \cdot 0^2 + P_2$

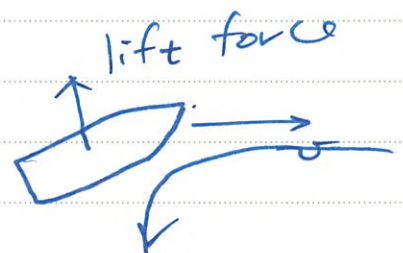
$\therefore P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho v^2$ (此為流體所受之力, $\frac{d(-mv)}{dt} \times VA$)

壓力差 $\sim F_d$

物體受力與其相反)
 $\propto v^2$

$\therefore F_d \propto -v^2$

除了阻力外, 當 v 大時, 還有所謂的昇力 (lift force): 如流體改向所造之力



如果只有重力及阻力，則運動方程式

為一階：

$$ma = m \frac{dv}{dt} = -kmv \quad \parallel \text{ 一階微分方程式}$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = -kv$$

其解可由積分得到：

$$\frac{dv}{v} = -k dt$$

$$\int_{\substack{v_0 \\ v(0)}}^{v(t)} \frac{dv}{v} = - \int_0^t k dt = -kt$$

$$\therefore \ln v(t) - \ln v_0 = -kt$$

$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$

再由 dx ，可求 $x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 e^{-kt}$$

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v_0 e^{-kt'} dt'$$

$$= \frac{-v_0}{k} e^{-kt'} \Big|_{t'=0}^{t'=t} = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$$

Relation of v to x :

$$\frac{dv}{dt} = -kv, \quad \text{但} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = -k, \quad v = v_0 - k(x - x_0)$$

+ mg : 如果加上重力

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kmv$$

還是可以用積分的方法求解，但因為 mg

為常數，可以直接得解如下：
 $\uparrow$
 shift

$$\frac{dv}{dt} = -kv - g = -k \underbrace{\left(v + \frac{g}{k}\right)}_{v_s}$$

$$\therefore \frac{dv_s}{dt} = \frac{dv}{dt} \quad \therefore \quad \frac{dv_s}{dt} = -kv_s$$

和沒重力之情形一樣。

$$\therefore v_s(t) = v_s(0) e^{-kt}$$

$$v(t) = -\frac{g}{k} + v_s(0) e^{-kt}$$

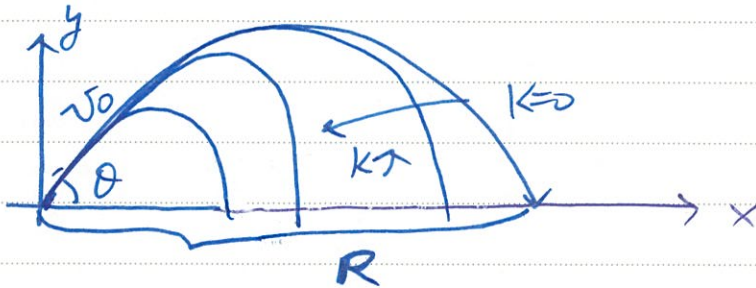
$$= -\frac{g}{k} + (v_0 + \frac{g}{k}) e^{-kt}$$

$$x(t) = x_0 - \frac{g}{k} t$$

$$+ \frac{kv_0 + g}{k^2} (1 - e^{-kt})$$

$t \rightarrow \infty$, $v \rightarrow -\frac{g}{k}$ 是所謂的終端速度 (terminal velocity).

例2. 有阻力之拋體運動



$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -mg \hat{y} - mk \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{r} = (x, y)$$

分量: $m\ddot{x} = -km\dot{x}$ $\rightarrow$ 到 $v_y = \frac{g}{k}$ 之
 $m\ddot{y} = -km\dot{y} - mg$ 坐標中, $\vec{v}$ 之方向
 不變.

起始條件: $x(t=0) = 0,$
 $y(t=0) = 0$
 $\dot{x}(0) = v_0 \cos \theta = u$
 $\dot{y}(0) = v_0 \sin \theta = v$

x 方向運動与 y 無關 例1 一樣:
 沒有重力之情況

$$x(t) = \frac{u}{k} (1 - e^{-kt})$$

而 y 方向則有重力, $y(t) = -\frac{g}{k} t + \frac{kv + g}{k^2} (1 - e^{-kt})$

$$\therefore y = \left(\frac{kv + g}{ku} \right) x + \frac{g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{k}{u} x \right)$$

不再是拋物線 (parabola)

$$k \rightarrow 0 \text{ 時 } \ln(1 - \frac{k}{u}x) = -\frac{k}{u}x - \frac{1}{2}(\frac{k}{u}x)^2 + \dots$$

$$\therefore y = \frac{v}{u}x + \frac{g}{ku}x + \frac{g}{k^2}(-\frac{k}{u}x - \frac{1}{2}(\frac{k}{u}x)^2 + \dots)$$

$$= \frac{v}{u}x - \frac{g}{2u^2}x^2 - \frac{1}{3}\frac{kg}{u^3}x^3 + \dots$$

為拋物線

一般而言,

$$R \text{ 由 } \frac{k(v+g)}{ku}R + \frac{g}{k^2} \ln(1 - \frac{k}{u}R) = 0$$

決定, 其最大值不再是 $\theta = 45^\circ$.

(R 之最大值與 θ , v_0 , k 之關係 = ? exercise)

對於大 k 而言, $\because v_x$ 很快 $\rightarrow 0$, 所以

落地的斜率 $\rightarrow \infty$

以上的例子皆是由一階微分方程式即可解決, 並不是所有例子皆如此, 我們之後會回來談二階微分方程式之一般解法

由 $y=0$ 可得

$$X_m = \frac{2uv}{g} - \frac{2mk}{3u} X_m^2 + \dots$$

for small k , $X_m = \frac{2uv}{g}$ 代入上式

$$\text{可得 } X_m = \frac{2uv}{g} - \frac{4}{3} \frac{kuv^2}{g^2} + \dots \quad (k \text{ 的展開})$$

以上是小 k 之結果

若 k 很大, 當 $1 - \frac{k}{u} X \approx 0$ 時, $X = \frac{u}{k}$, $y \rightarrow -\infty$
為 vertical drop 代表了 $X_m \sim \frac{u}{k}$

More realistic cases:

(i) 有風速 $\vec{v}_w$

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -mg \hat{y} - mk \left(\frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v}_w \right)$$

(ii) 空氣阻力與密度有關

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -mg \hat{y} - mke^{-\gamma h} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

此時不再可以代入一階微分方程式解之!

General remarks on 1st order ODE

(ODE = ordinary differential eq.)

* Linear

↓ 沒有 $y^2, y^3, \dots$ 等非線性項

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x) \quad \text{--- ①}$$

$$(\text{例}) \quad m \frac{dv}{dt} = F(v, t) = p(t)v + q(t)$$

observe that

$$\frac{d}{dx} \left[e^{-\int^x p(x') dx'} y \right]$$

$$= e^{-\int^x p(x') dx'} \left[\frac{dy}{dx} - p(x)y \right]$$

$$\therefore \text{①式} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[e^{-\int^x p(x') dx'} y \right] = e^{-\int^x p(x') dx'} q(x)$$

$$\therefore e^{-\int^x p(x') dx'} y = \int dx \, q(x) e^{-\int^x p(x') dx'} + C$$

$$y = e^{\int^x p(x') dx'} \left(\int dx_1 \, q(x_1) e^{-\int^{x_1} p(x_2) dx_2} + C \right)$$

$$* \text{ generally, } \frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

$$\text{可以寫成} \quad M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad \dots \text{②}$$

$$\text{如果令} \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{比較}$$

$$\text{可知若} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{則可以找得到} f \text{使得} df = 0$$

$$\text{而} \because \frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \therefore f = \int M dx + g(y) \leftarrow \text{arbitrary func. of } y$$

$$\text{但 } \because \frac{df}{dy} = N \quad \therefore \int \frac{dM}{dy} dx + g'(y) = N$$

$$g(y) = \int \left(N - \frac{d}{dy} \int M dx \right) dy$$

如此, eq. (2) 稱為 exact.

如果 $\frac{dM}{dy} \neq \frac{dN}{dx}$, 我們乘 (2) 一個 integrating factor $u(x, y)$, 使得

$$\frac{d}{dy}(uM) = \frac{d}{dx}(uN)$$

找 u 成為解 (2) 之主要工作.

例一.
$$\begin{array}{ccc} e^y dx & + & (xe^y + 2y) dy = 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ M & & N \end{array}$$

$$\frac{dM}{dy} = e^y = \frac{dN}{dx}$$

$$\therefore M dx + N dy = df = 0$$

$$\frac{df}{dx} = M = e^y \quad \text{且} \quad \frac{df}{dy} = N$$

$$\therefore f = \int e^y dx + g(y) = xe^y + g(y)$$

$$\frac{df}{dy} = xe^y + \frac{dg}{dy} = N = xe^y + 2y$$

$$\therefore \frac{dg}{dy} = 2y, \quad g = y^2 + C$$

$$\therefore f = xe^y + y^2 + C \quad \because df = 0 \quad \therefore f = \text{常數}$$

$$\therefore xe^y + y^2 = C \quad \text{由此可得 } y \text{ 與 } x \text{ 之關係}$$

Conservation theorems and constants of motion

我們提一個 n 階微分方程式的通解有 n 個未定的常數。這些常數可以是起始條件，也可以是 $x(0), \dot{x}(0), \dots$ 之組合。

反過來說，如果我們可以找到由 $x, \dot{x}, \dots$ 等之組合的常數， $f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots) = C$ ，則未定的常數只剩 $n-1$ 個，所以，微分方程式降為 $n-1$ 階！

這些常數通稱為 Constants of motion，它們通常為 Conservation Theorems 的產物。

1. $F=0$ ，則 total linear momentum $\vec{P}$ is conserved:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} = 0 \quad \therefore \vec{P} = \text{常數}$$

原方程式有 3 個

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dx}{dt} &= P_x \\ m \frac{dy}{dt} &= P_y \\ m \frac{dz}{dt} &= P_z \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{變成一} \\ \text{階微分} \\ \text{方程式} \end{array}$$

6 個待定常數

$$x = a_x t + b_x$$

$$y = a_y t + b_y$$

$$z = a_z t + b_z$$

動量守恒固定了 a_x, a_y 及 a_z

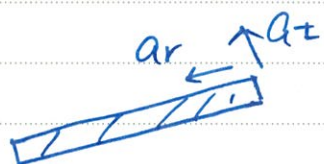
剩下 b_x, b_y 及 b_z 未定。

2. $\vec{\tau} = 0$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ 守恒

Newton's 2nd law for rotation:

很多物件的運動只有轉動，這時 r 固定，

是分子內力提供向心力 (a_r),



大多數情況下，我們不
須知道 a_r ，所以人

只須考慮 a_t

即 $\vec{r} \times \vec{a}$ ，這就是力矩定義的

由來 $\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\therefore \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \therefore \vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

$$- \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

$\therefore \vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}$ 是一個新守恒量，稱為角動量。
 $\vec{L} = 0$ 時，

以 2D 來說， $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = mr^2 \dot{\theta} \hat{z}$

$\therefore \vec{L} = 0$ 時 $mr^2 \omega = \text{常數}$

如 $r = \text{fixed}$, $\omega = \text{常數}$

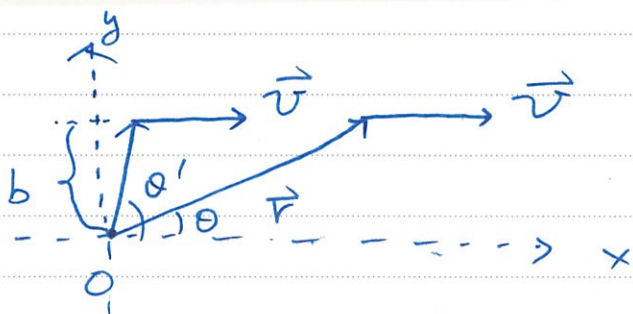
* 注意，角動量的守恒定義不需要 $r = \text{常數}$

如自由粒子

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mrv \sin\theta (-\hat{z})$$

$$= mbv (-\hat{z})$$

= 常向量



3. 保守力場中之總能量守恆

能量的概念源自於對功及位能之

理解後所產生的一個重要觀念。它是

一個重要的 constant of motion. 在一維

中，等價於牛頓第二運動定律

(功)
Work 與動能

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{為三種向量積分之$$

一種：

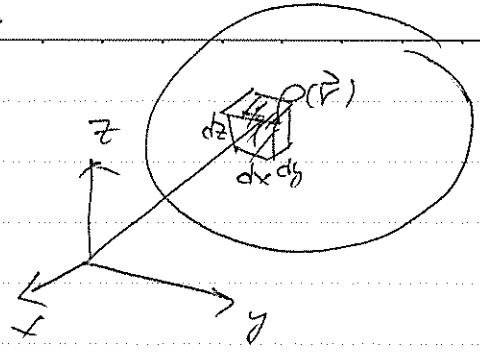
給定向量 $\vec{A}$

$$(i) \int_V \vec{A} d^3r = \iiint \vec{A} dx dy dz$$

$$= \left(\iiint A_1(x, y, z) dx dy dz, \iiint A_2(x, y, z) dx dy dz, \iiint A_3(x, y, z) dx dy dz \right)$$

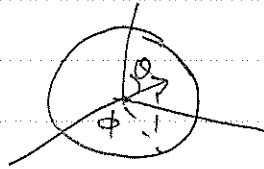
三個分量分開積分，積分後仍是一個向量

例: 質心 $\vec{R} = \frac{1}{M} \iiint \rho \vec{r} dV$



$\rho dx dy dz$ 為在 $\vec{r}$ 處附近一小塊 dV 之質量

以均勻球體為例



$$\vec{r} = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

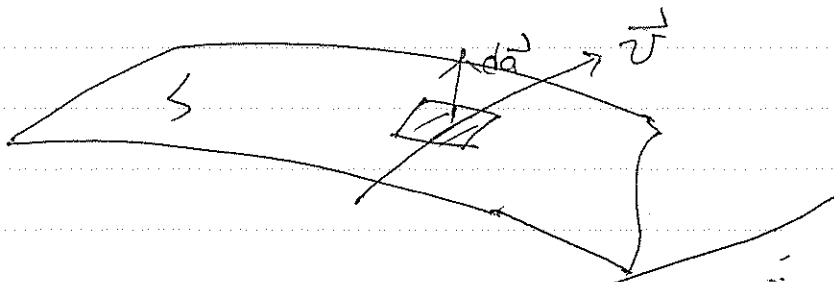
$$\vec{R} = \frac{1}{M} \rho \iiint r (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{1}{M} \times \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_0^R r^3 dr \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \right)$$

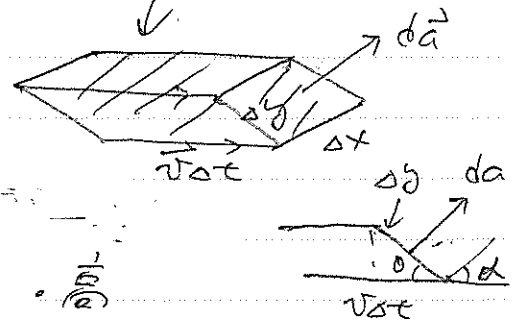
$$= (0, 0, 0)$$

(ii) $\int_S \vec{A} \cdot d\vec{a} = \text{流量 (面積分)}$

例: $\vec{A} = \vec{v}$



在 Δt 時間內流出之量



$$\Delta t \text{ 流出之量} = \text{速度} \times \text{底面積} \times \text{高} = v \Delta t dA \cos \theta = v dt dA \sin \theta \cos \alpha$$

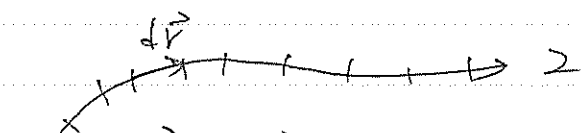
$$= \vec{v} \cdot d\vec{a} \Delta t$$

$\therefore \vec{v} \cdot d\vec{a}$ = 單位時間通過 $d\vec{a}$ 之量

$\therefore \int_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$ 為單位時間通過 S 之量

(iii) $\int \vec{A} \cdot d\vec{r}$ (線積分)

其物理的例子即為功



$\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 在 $d\vec{r}$ 內所作之功

$$\therefore \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \vec{a} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

此為在 $\vec{F}$ 作用下
通過 $d\vec{r}$ 之時間

$$\therefore \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt$$

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v})$$

$$\therefore W_{12} = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dv^2}{dt} dt = \frac{m}{2} \int_{v_1^2}^{v_2^2} dv^2$$

$$= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \therefore \text{所做的功可視為前後 } \frac{1}{2} m v^2 \text{ 之差 與路徑無關!}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = T \text{ 即所謂的動能}$$

$$\therefore W_{12} = T_2 - T_1$$

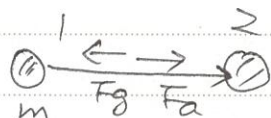
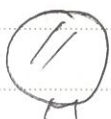
以上是对一自由粒子施力的結果 = 動能的改變。
(v^2)

位能

除了对自由粒子施力外，實際的

例子發現，施力不一定引起動能的改變

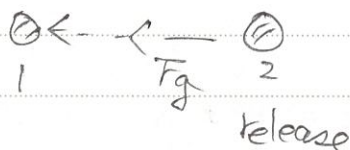
如



將 m 由 1 移到 2，為了抗拒重力，必須施 $\vec{F}_a$ 。
若施 $\vec{F}_a + \vec{F}_g = 0$ 可使 m 緩慢由 1 $\rightarrow$ 2
施力 $\vec{F}_a$ 之結果為物體

之“相對位置”改變了！

動能維持 ≈ 0



我們再觀察，若將 m 自 2 釋放，由 $\vec{F}_g$ 作用，則

上面的結果適用， m 回到 1 時得 $\int_2^1 \vec{F}_g \cdot d\vec{r}$ 之動能！

$\therefore$ 結論是，施力 $\vec{F}$ 使 m 到 2 具有潛力回到 1 得
到動能！

因此， m 在 2 比在 1 較具潛力。

所以描述此 潛力即為位能！

∴ 是

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \text{位能之改變} = U_2 - U_1$$

$$\therefore \vec{F} = -\vec{F}_g$$

$$\therefore U_2 - U_1 = - \int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{r} \quad \text{--- (*)}$$

$$\therefore \int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = T_2 - T_1$$

$$\therefore U_2 - U_1 = -T_2 + T_1$$

$$\therefore T_2 + U_2 = U_1 + T_1$$

我們定 total energy $E = T + U$

∴ 總能量守恆！

但這個結論之前提是 (*) 可成立！

問題是 (*) 為何可以不成立？

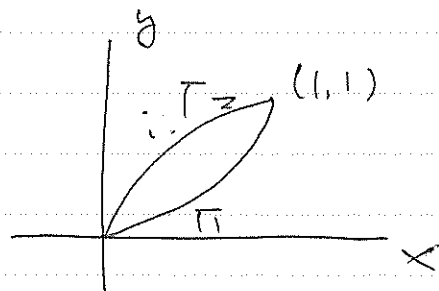
問題在於線積分與一維積分不同，^{可能}會

路徑有關：

例： $\vec{F} = (x-y)\hat{e}_1 + (x+y)\hat{e}_2$

$$\Gamma_1: y = x^2$$

$$\Gamma_2: x = y^2$$



在 Γ_1 上, $d\vec{r} = (dx, dy) = (dx, dx^2) = (dx, 2x dx)$

$$\vec{F} = (x - x^2, x + x^2)$$

$$\therefore \vec{F} \cdot d\vec{r} = (x - x^2)dx + (x + x^2)(2x dx)$$

$$= (2x^3 + x^2 + x) dx$$

$$\int_{\Gamma_1}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (2x^3 + x^2 + x) dx$$

$$= \frac{2}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

對 Γ_2 而言, $d\vec{r} = (dx, dy) = (dy^2, dy) = (2y dy, dy)$

$$\vec{F} = (y^2 - y, y^2 + y)$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = 2y(y^2 - y) dy + (y^2 + y) dy$$

$$= (2y^3 - y^2 + y) dy$$

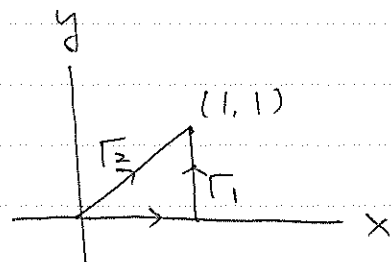
$$\int_{\Gamma_2}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (2y^3 - y^2 + y) dy = \frac{2}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

由此例可看出, $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 可能與路徑有關, 因此

不可能只是 z 及 1 之函數

但也有例子與路徑無關:

例 $\vec{F} = (xy, x^2)$



$$\Gamma: \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{y=0, x=0 \rightarrow 1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{x=1, y=0 \rightarrow 1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_0^1 (0, x^2) \cdot (dx, 0) + \int_0^1 (2y, 1) \cdot (0, dy) = \int_0^1 dy = 1$$

$$\Gamma_2: x=y$$

$$\vec{F} = (2x^2, x^2), \quad d\vec{r} = (dx, dy) = (dx, dx)$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = 2x^2 dx + x^2 dx = 3x^2 dx$$

$$\therefore \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^1 = 1$$

如果的路徑無關：

$$U(\vec{r}+d\vec{r}) - U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \approx - \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\therefore U(x+dx, y+dy, z+dz) - U(x, y, z) = - (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$\therefore U(x+dx, y+dy, z+dz) = U(x, y+dy, z+dz) + \frac{\partial U}{\partial x}(x, y+dy, z+dz) dx$$

$$= U(x, y+dy, z+dz) + \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) dx$$

$$+ O(dx dy, dx dz)$$

$$U(x, y+dy, z+dz) = U(x, y, z+dz) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) dy + O(d^2)$$

$$U(x, y, z+dz) = U(x, y, z) + \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) dz + O(d^2)$$

$$\therefore U(\vec{r}+d\vec{r}) - U(\vec{r}) = \frac{\partial U}{\partial x}(\vec{r}) dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

$$= -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

$$\therefore F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

簡記： $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ (梯度) gradient

為"向量微分算符"之推廣

也就是說, 若 $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 與路徑無關, 則 $\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(1) - U(2)$

$$\vec{F} = -\nabla U \quad \text{反之若} \quad \vec{F} = -\nabla U$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\nabla U \cdot d\vec{r} = -dU$$

$$\therefore \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 dU = U(2) - U(1) \quad \text{也成立}$$

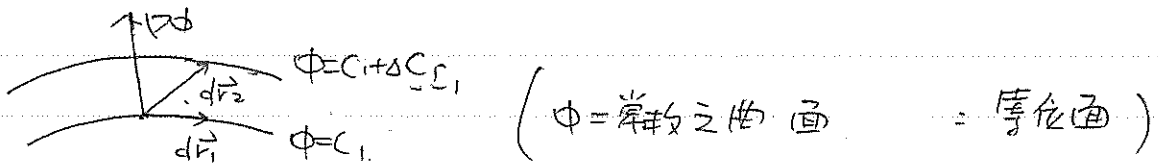
$\therefore \vec{F} = -\nabla U$ 是 $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 與路徑無關之充要條件

$\vec{\nabla}$ 的三種運算

(i)

$\vec{\nabla}$ 於 scalar $\phi(x, y, z) \Rightarrow \nabla \phi(x, y, z)$

$$d\phi = -\vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r} = -|\nabla \phi| dr \cos \theta \quad (\text{如左圖所示})$$



在 $\phi = \text{常數之曲面}$ 間, 若 $d\vec{r}$ 在 C_1 上, 則 $d\phi = 0$

$$\therefore \theta = \pi/2 \quad \text{即} \quad \vec{\nabla} \phi \perp d\vec{r}$$

$\therefore \vec{\nabla} \phi$ 垂直於 ϕ 的等位面

反之若 $d\vec{r} \parallel \vec{\nabla} \phi$, 則 $d\phi$ 最大, $\therefore \vec{\nabla} \phi$ 是指向 ϕ 值

改變之最大方向!

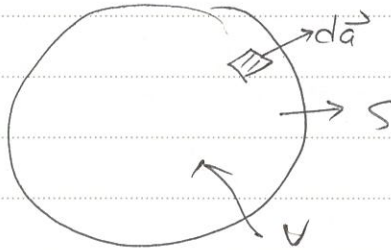
(ii) $\vec{\nabla}$ 於 vector field $\vec{A}(x, y, z)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{或} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\partial x} A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

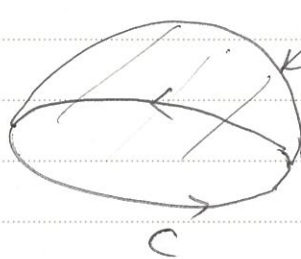
重要的定理是

Gauss's theorem $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3r = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{a}$



Stoke's theorem

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{e} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{a}$$



(定理之證明略)

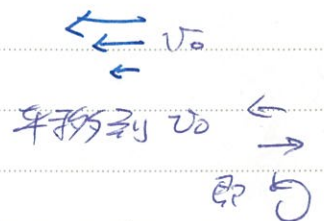
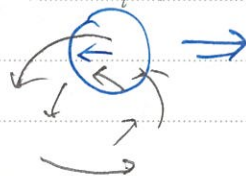
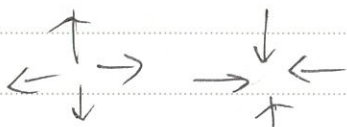
見 2-31-1

也就是說 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ 在計算由一處流出之淨流量

而 $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ 代表 circulation. $\oint \vec{A} \cdot d\vec{e}$

事實上, 如果觀察水流, 可以發現只有二個特徵:

源頭/或吸入口 以及 渦流



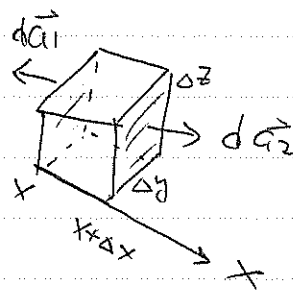
事實上, 在適當的條件下可證明, 任意向量場 $\vec{A}$

可由 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ 及 $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ 決定!

完全

Gauss 及 Stoke 定理之簡易推導及理解

Gauss 定理 : 考慮一小立方體



$$d\vec{A}_1 = \Delta y \Delta z (-\hat{x})$$

$$d\vec{A}_2 = \Delta y \Delta z \hat{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{A} \cdot d\vec{A}_1 + \vec{A} \cdot d\vec{A}_2 &\approx (-A_x(x, y, z) \Delta y \Delta z) + A_x(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z \\ &= \frac{dA_x}{dx} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

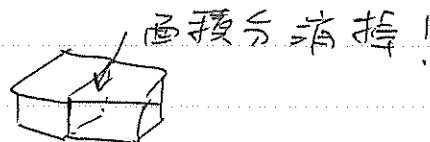
同理對 $\Delta x \Delta y$ 面 $\Rightarrow \frac{dA_y}{dy} \Delta x \Delta y \Delta z$

$\Delta x \Delta z$ " $\Rightarrow \frac{dA_z}{dz} \Delta x \Delta y \Delta z$

$$\therefore \int_V \vec{A} \cdot d\vec{A} = \left(\frac{dA_x}{dx} + \frac{dA_y}{dy} + \frac{dA_z}{dz} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3r$$

對於一般大體積 V 可拆成許多小體積之積分的和。
面積分

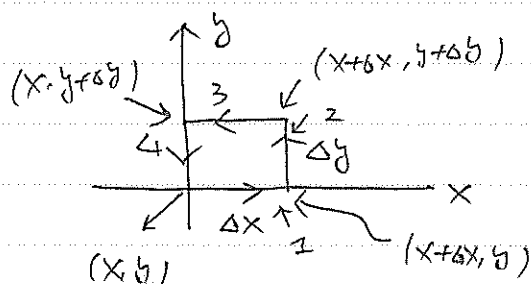
$\therefore$ 相鄰小體積之面積分



相消 $\therefore$ 最後只剩最外面之面積分

$$\text{故 } \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3r = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{A} \text{ 是成立的!}$$

Stoke 定理 : 考慮一小 4 角 loop C



$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint A_x dx + A_y dy$$

$$\oint A_x dx = \int_1 A_x dx - \int_3 A_x dx$$

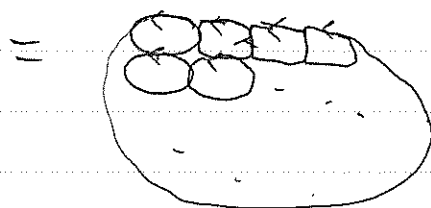
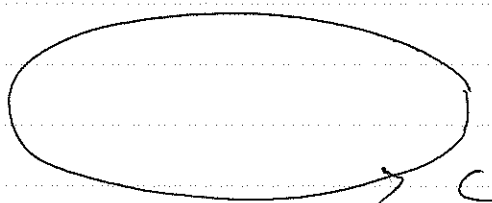
3 上 Δx 5 1 上 Δx 相反

$$\begin{aligned}\therefore \oint A_x dx &\cong A_x(x, y) \Delta x - A_x(x, y + \Delta y) \Delta x \\ &= - \frac{dA_x}{dy} \Delta x \Delta y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{同理 } \oint A_y dy &= \int_2 A_y dy - \int_4 A_y dy \\ &= A_y(x + \Delta x, y) \Delta y - A_y(x, y) \Delta y \\ &= \frac{dA_y}{dx} \Delta x \Delta y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} &= \left(\frac{dA_y}{dx} - \frac{dA_x}{dy} \right) \Delta x \Delta y \\ &= (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \Delta x \Delta y \hat{z} \\ &= \int \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{a}\end{aligned}$$

与 Gauss 定理一樣，对大的一般 loop C ，可以拆成小的而得证



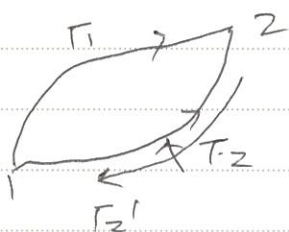
保守力的數學判斷方法

所謂的保守力 (conservative force) 是指
作功与路徑無關之力場。

根據上述可知, 此時 $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, 反之亦然。
然而要判斷何時 $\vec{F}$ 可以寫成 $-\vec{\nabla}U$ 卻不容易。

數學上, $\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 与路徑無關

与 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ for any C 是一樣ES:



$$\int_{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$-\int_{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\therefore \int_{r_1} - \int_{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$\therefore \vec{F}$ 是保守力, 則 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ for any close curve C .

由 Stokes 定理 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial S} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{a} = 0$ for any S

$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ (反之亦然)

故數學上的判斷方式是 $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ (注意: $\vec{F}$ 之定義空間 $\vec{F}$ 適用於沒有

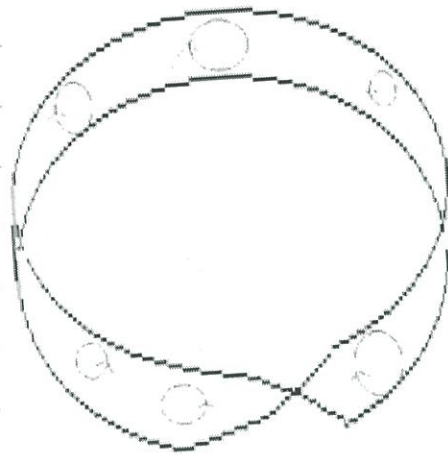
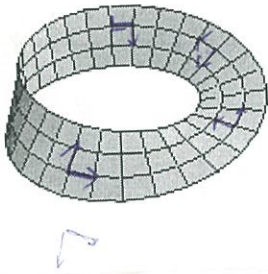
物理圖像 $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$ 有渦流 (逆流) (順流) 逆流和順流 $\therefore \int_{r_1} \neq \int_{r_2}$



Stokes' 定理^{相對}之適用性:

(i) Surface 必須是能被 oriented (方向性)

所以, 像^在 Mobius band 上不適用



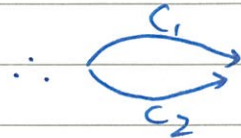
(ii) $\nabla \times \vec{A} = 0 \Leftrightarrow \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ 与路径無關
只在沒有洞時才成立.

如果有洞, $\nabla \times \vec{A} = 0 \Rightarrow \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ 与路径無關
不成立!

圖像:



局部上



局部 C_1 与 C_2 沒有遇上渦流

$\therefore$ 局部上 $\nabla \times \vec{A} = 0$

但^在上圖之 C_1 及 C_2 顯然^有渦流, $\int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} \neq \int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{r}$

以之前的例子來說

$$\vec{F} = (x-y, x+y), \quad \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(x-y) \right) \hat{z} \\ = 2\hat{z} \neq 0$$

$\therefore$ 与路徑有關!

$$\text{而 } \vec{F} = (2xy, x^2) \text{ 時, } \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} x^2 - \frac{\partial}{\partial y} 2xy \right) \hat{z} \\ = (2x - 2x) \hat{z} = 0$$

$\therefore$ 与路徑無關!

能量与一維運動

在一維運動中, $r = x$, 所以只有二個常數 (constant of motion (運動常數))。

$\therefore E$ (能量) 給定了, 就只剩一個運動常數未定。

故方程式變成一階!

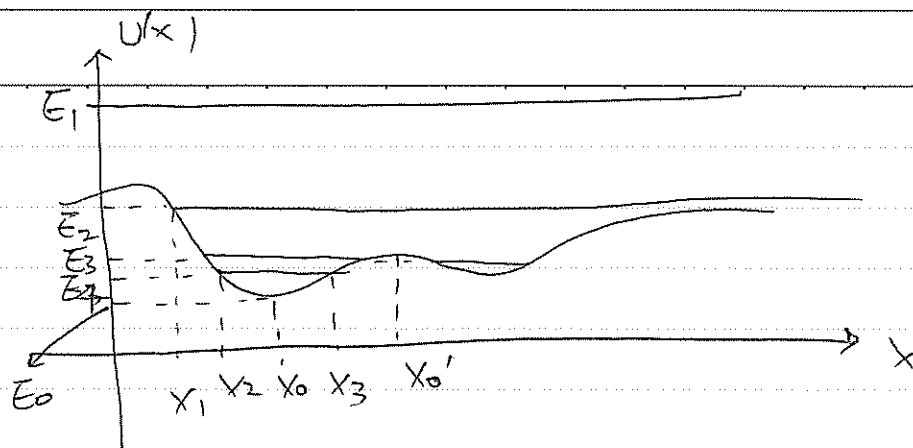
$$\text{由 } E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x).$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

$$\therefore \int_{x_0}^x \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} = \int_{t_0}^t dt$$

$\therefore$ 只要會做積分, 即可得到解 $x(t)$!

除此之外, 由於只有一個常數, 由 $U(x)$ 之圖型即可对運動之特性有大致的了解。



x_1 : turning point, momentarily $\frac{dx}{dt} = v = 0$, 速度反向
 x_2
 x_3

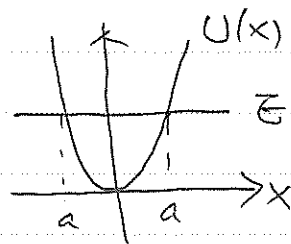
E_1, E_2 : unbounded motion

E_4 : periodic

E_0 : x_0 stable equilibrium point $\frac{d^2U}{dx_0^2} > 0$
 x_0' unstable " " $\frac{d^2U}{dx_0'^2} < 0$

E_3 : particle is either in the left or the right part.

例 $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ (简谐振子)



$$E = \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm \int \sqrt{\frac{k}{m}} dt$$

$$x = a \sin \theta \quad dx = a \cos \theta d\theta$$

$$\therefore \text{LHS} = \int d\theta = \theta = \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$$

$$\therefore \sin^{-1} \frac{x}{a} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} t + \text{常数}$$

$$\therefore X = a \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + c)$$

($-\sin\theta = \sin(\theta + \pi)$, $\therefore$ 負號可被 c 吸收!)

若 $t=0$ 時 $X=a$, 則 $c=\pi/2$

$$\begin{aligned}\therefore X &= a \sin(\omega t + \pi/2) & \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ &= a \cos \omega t\end{aligned}$$

能量之相對性

$\therefore \vec{F} = -\nabla U$ $\therefore$ 如果 U 加上一常數 $U+c$ 並

不影響 $\vec{F}$, 也就是只有 U 之變化才有物理意義, U 的絕對值沒有意義。

同樣的, $T = \frac{1}{2}mv^2$ 與座標有關

不同的座標 $\vec{v}$ 不同, $\therefore T$ 也不同

$\therefore E = T + U$ 之絕對值在力學並不具意義