

六 Gravitation and Central-force Motion

Gravitation

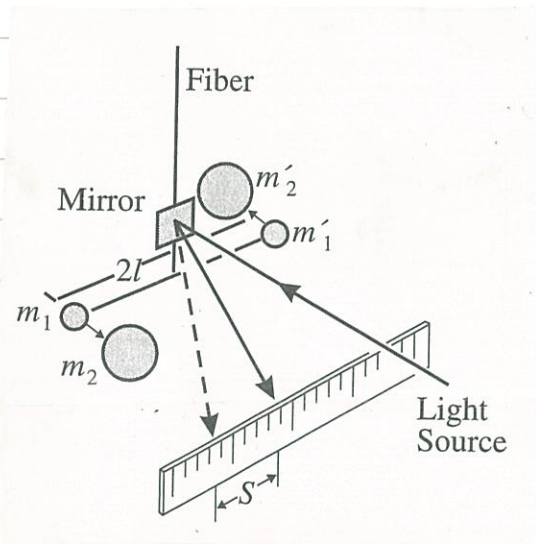
重力的定律最早是由 Newton 寫下：對 2 個質點而言



$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{e}_r$$

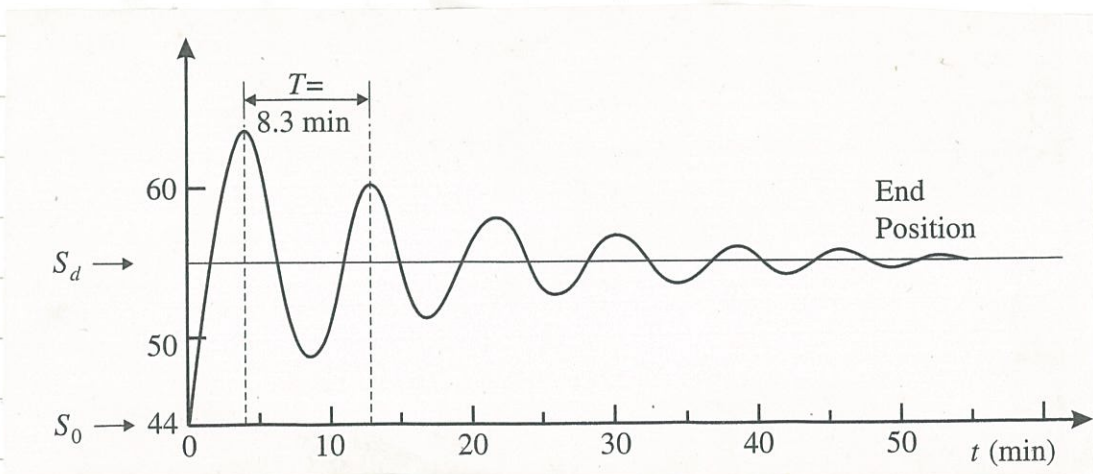
$$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

G 的測量是由所謂的 Cavendish 實驗測得：
精確



透過扭力的
平衡測出

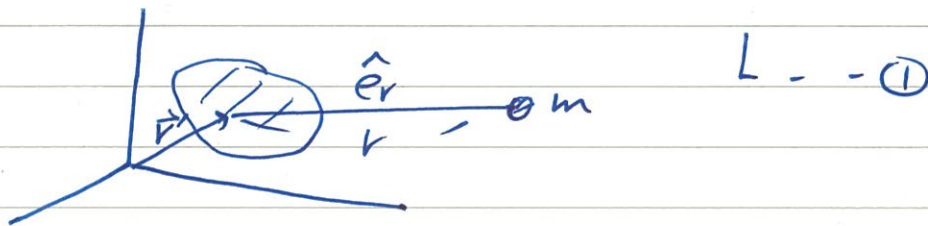
m_1 與 m_2 及 m_1'
與 m_2' 間之
力 (如左圖)



對於的質集或有大小之物件，則中復 Superposition 成立，

復得

$$\vec{F} = -Gm \int_V \frac{\rho(r') \hat{e}_r}{r^2} d^3r' = \sum_j \frac{-Gm \Delta m_j}{r_j^2} \hat{e}_{r_j}$$



故 \vec{g} (gravitation field vector)

$$\equiv \vec{F}/m = -G \int_V \frac{\rho(r') \hat{e}_r}{r^2} d^3r' \quad \leftarrow m \text{ 無關, 只 (test)}$$

與物質之分佈有關。

$$\text{由 } \vec{\nabla} \times \frac{\hat{e}_r}{r^2} = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & r\sin\theta\hat{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \text{勢為保守力, } \vec{F} = -\nabla U$$

$$\text{或 } \vec{g} = -\nabla\Phi \quad \Phi \equiv \text{gravitational potential}$$

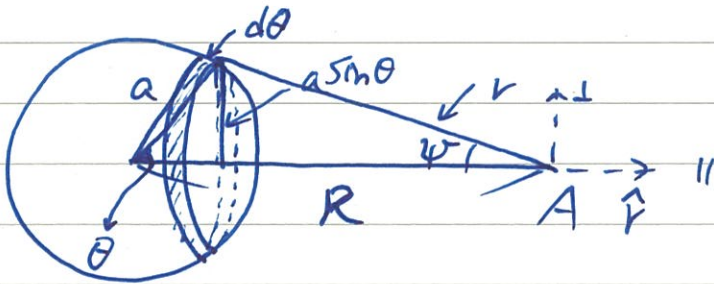
$$U = m\Phi = \text{gravitational potential energy}$$

$$\Phi = -G\frac{M}{r} \quad \therefore \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \hat{e}_r = G\frac{M}{r^2} \hat{e}_r$$

$$\therefore \vec{g} = -G\frac{M}{r^2} \hat{e}_r$$

由①式可知對 finite (有限) 物體而言，其餘
產生之重力中須求積分。

例 均勻球殼 所產生之動



考慮在 $(\theta, \theta + d\theta)$ 間之 ring，其面積 $ds = 2\pi a \sin\theta d\theta$

此 ring 在 A 處所產生之力一因為 \perp 方向抵消，故
只需算 \parallel 方向。

$$\therefore \text{此 ring 的貢獻為: } d\vec{F} = - \frac{GM \sigma ds}{r^2} \cos\psi \hat{r}$$

$$\sigma = \frac{M}{4\pi a^2} \text{ 為面密度}$$

$$\therefore F = \int dF = - GM \sigma 2\pi a^2 \int \frac{\cos\psi \sin\theta d\theta}{r^2}$$

$$\therefore r^2 = a^2 + R^2 - 2aR \cos\theta$$

$$r dr = aR \sin\theta d\theta \quad \sin\theta d\theta = \frac{r}{aR} dr$$

$$\text{又 } a^2 = R^2 + r^2 - 2rR \cos\psi$$

$$\cos\psi = \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2rR}$$

$$\text{故 } F = -GM \delta \pi a^2 \int \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr^3} \frac{rdr}{aR}$$

$$= -\frac{GM \delta \pi a}{R^2} \int_{R-a}^{R+a} \left(1 + \frac{R^2 - a^2}{r^2}\right) dr$$

$$= -\frac{GM \delta \pi a}{R^2} \left[\underbrace{2a - \frac{(R^2 - a^2)}{r}}_{\parallel} \right]_{R-a}^{R+a}$$

$$2a - (R^2 - a^2) \frac{-2a}{R^2 - a^2} = 4a$$

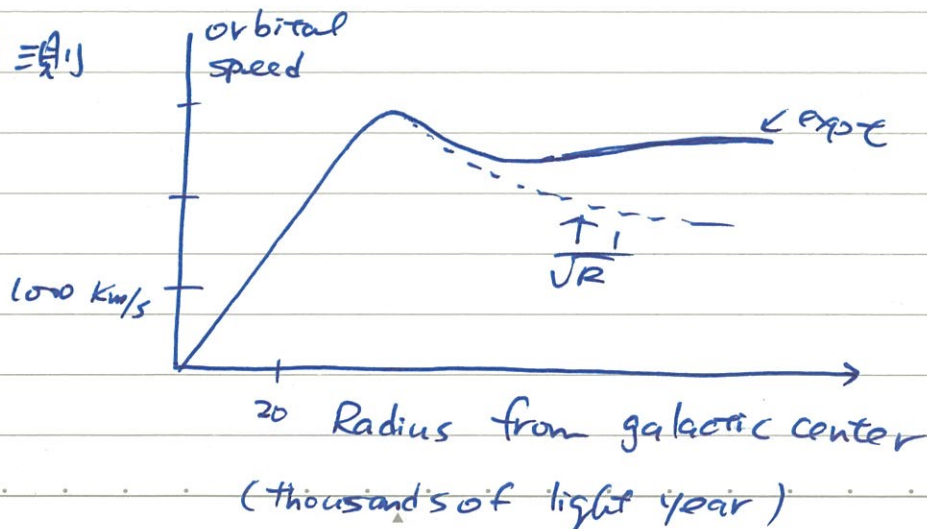
$$= -\frac{GM}{R^2} \underbrace{(\delta \cdot 4\pi a^2)}_M$$

故 $\vec{F} = -\frac{GMm}{R^2} \hat{r}$ 令得 M 集中在中心

算之結果一樣，此結果也可經使用 Gauss 定律
計及對稱性得到。

例：暗物質 (dark matter) 的存在

天文的觀測



$$\therefore \frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \quad (\text{重力提供向心力})$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

其中 $M = \text{galaxy}$ 在半徑 $\leq R$ 之質量

若 $M = \text{常數}$, 則 $v \propto \frac{1}{\sqrt{R}}$ 與實驗不符
 (即 galaxy 的質量集中在中心)

由實驗 $v \sim \text{常數}$, 可推測 $M \propto R$

由於光學所見之 galaxy 皆集中在中心, 因此,

天文學家推測一定存在未被觀測到的物質,

即所謂的暗物質存在, 且佔有 90% 以上!

至於暗物質的起源, 仍是天文物理重
 要的^{目前}研究課題之一。

Ocean tides & tidal force

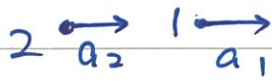
潮汐現象為月球及太陽重力作用^{共同}造成的。

其基本原理為當重力場不均勻時, 在

一個有大小之物件上, 會受到所謂的

tidal force (潮汐力):

如左圖, a_1 及 a_2



為在左面 = 重力
由重力

$$a_1 = GM/r_1^2, \quad a_2 = GM/r_2^2 \quad \text{之加速度}$$

$$\text{對不均勻之重力, } a_1 - a_2 = GM(r_1^2 - r_2^2) \neq 0$$

\therefore 1 與 2 有相對加速度, 並得 1 與 2 分開 ($a_1 - a_2 > 0$)

這種力稱為 tidal force.

因此, 之前在談等價原理時:

局部 free fall 座標

= 局部慣性座標



同到: 局部 free fall 之加速度 a

$$\therefore m_I \vec{a} = m_G \vec{g} \quad \text{且 } m_I = m_G$$

\therefore 在加速度 $\vec{a} = \vec{g}$ (free fall) 之座標中

重力可以被消除成為局部慣性座標。

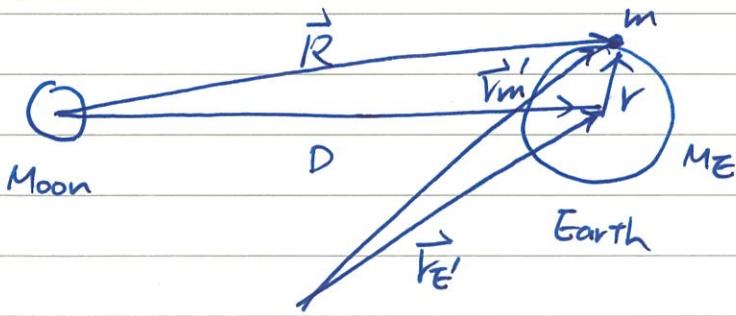
這嚴格說來只有一處(即局部)成立, 鄰近的處

之加速度不同, 因此在 free fall ($\vec{a} = \vec{g}$) 之座標
重力

仍可察覺鄰近處之移動! 這基本上即潮汐現象的原理!

以月球对地球作用而言，地球上一点 m

所受之力



$$m \frac{d^2 \vec{r}_m}{dt^2} = - \frac{GmM_E}{r^2} \hat{e}_r - \frac{GmM_m}{R^2} \hat{e}_R$$

$$\Rightarrow M_E \frac{d^2 \vec{r}_E'}{dt^2} = - \frac{GM_E M_m}{D^2} \hat{e}_D$$

\therefore 相对地球之加速度 = $\ddot{r}_m' - \ddot{r}_E'$

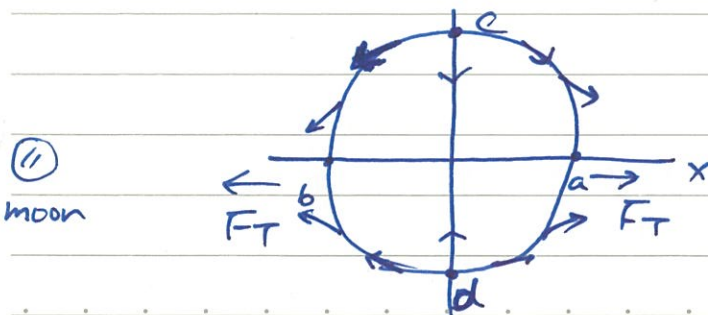
$$= - \frac{GM_E}{r^2} \hat{e}_r - \frac{GM_m}{R^2} \hat{e}_R + \frac{GM_m}{D^2} \hat{e}_D$$

由地球提供

地球与 m 对月球加速度不同所造成

$$\therefore \vec{F}_T (\text{tidal force}) = -GMm \left(\frac{\hat{e}_R}{R^2} - \frac{\hat{e}_D}{D^2} \right) \dots (2)$$

将 \vec{F}_T 以图表示如下：



a: $R = D + r > D$

$$\vec{F}_T = -GMm \left(\frac{\hat{x}}{(D+r)^2} - \frac{\hat{x}}{D^2} \right)$$

b: $R = D - r < D$

$$\vec{F}_T \parallel -\hat{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{(D+r)^2} - \frac{1}{D^2} &= \frac{1}{D^2} \left[\left(1 + \frac{r}{D}\right)^{-2} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{D^2} \left[1 - 2\frac{r}{D} + \frac{3}{2}\left(\frac{r}{D}\right)^2 - \dots \right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{2r}{D^3}$$

$$\therefore F_T = \frac{2GmMm r}{D^3} \quad (\because a \approx \frac{r}{b})$$

近似: $R \approx D$



$$e_r \approx \theta = \frac{r}{D}$$

$$e_\theta \approx \hat{e}_\theta$$

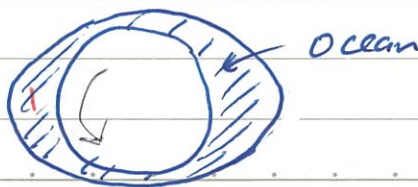
$$\therefore \text{②式} \text{中 } F_T^y(\text{近似}) = -GmM \frac{1}{D^2} \frac{r}{D} = -\frac{GmM}{D^3} r$$

\therefore 近似后, 同理, d 近似, F_T 向上

$$\text{一般近似} \Rightarrow F_{Tx} = \frac{2GmMm}{D^3} x = -GmMm \left(\frac{1}{(D+x)^2} - \frac{1}{D^2} \right)$$

$$F_{Ty} = -\frac{GmMm}{D^3} y$$

故 \Rightarrow Moon
地球表面
的海洋



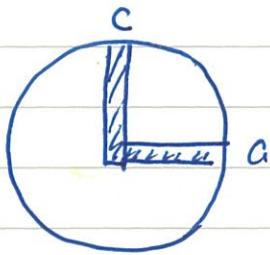
\therefore two high tides: one is facing moon, the other time is opposite to the moon.

同理，太陽也有相同效果。不過太陽的質量比較大，在地球上之重力比月球大 175 倍，但由於距離較遠，所造成之 gradient (即重力的差別) 較小，使得所產生 tidal force 只有月球的 0.46 倍！

例：Maximum height change caused by moon

Newton's model:

想像挖了 2 個井通到地心



則由 $c \rightarrow a$ 須作功

$$W = \int_{r+\delta_1}^0 F_T^y dy + \int_0^{r+\delta_2} F_T^x dx$$

δ_1 及 δ_2 為 偏離地球的高度

$$\because \delta_1, \delta_2 \ll r, \quad F_T^y = -\frac{GmMm y}{D^3}, \quad F_T^x = \frac{2GmMm x}{D^3}$$

$$\therefore W \cong \frac{GmMm}{D^3} \left(\int_r^0 (-y) dy + \int_0^r 2x dx \right)$$

$$= \frac{3GmMm}{2D^3} r^2$$

$$\text{此功} = \text{位能差} = mgh$$

$$\begin{aligned} \therefore h &= \frac{3GMm}{2gD^3} r^2 = \frac{3 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 7.35 \times 10^{22} \times (6.37 \times 10^6)^2}{2 \times 9.8 \times (3.84 \times 10^8)^3} \\ &= 0.54 \text{ m} \end{aligned}$$

deceleration
* Tidal acceleration 与 tidal lock

由於摩擦作用(貝圖)

由於地球會自轉，而月球繞地球較慢，故，月球所

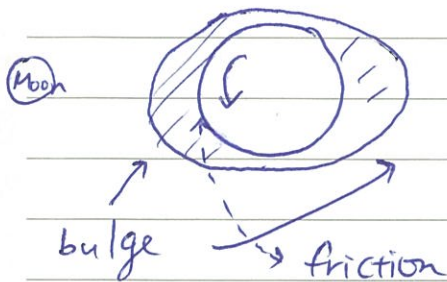
造成之 bulge (腫脹) 會使地球

自轉變慢 (tidal deceleration)。

另一方面，地球之自轉也有帶動

月球繞地球之轉動

(tidal acceleration)。

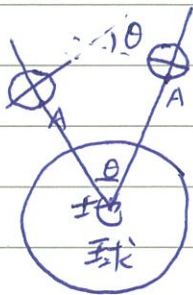


由於於 2700 年之記錄，地球日 $+1.70 \pm 0.05$ ms/per century

tidal lock 月球之轉動与自轉之週期一樣，
对地球

如 do，才會以同一面面对地球。do 為 tidal

lock 之現象。這是由於月球上造成腫脹 (bulge)，
地球也在



受 do bulge 摩擦之結果，最後

使得 A 球自轉与“公轉”週期一致之故。

Central force Motion

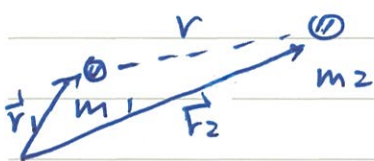
以上_今考慮重力的靜態效果。

重力屬於向心力 (Central force), 即 $\vec{F} \parallel \hat{r}$,

在此力場下之運動的處理可以統一處理。

設 $\vec{F} = -\nabla U(r)$, $\because \vec{F} \parallel \hat{r}$, $\vec{D} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$

$\therefore U = U(r)$ 與 θ 及 ϕ 無關



因此, $L = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\vec{r}}_2|^2 - U(r)$

$r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ (如左圖所示) ③

座標轉換與 reduced mass

由於 U 只與 $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 有關, 我們作以下轉換

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{質心})$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \dots \quad \text{④}$$

$$\text{即 } M \vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 \quad \dots \quad \text{⑤}$$

$$\text{由 } m_2 \times \text{④} + \text{⑤} \Rightarrow M \vec{r}_1 = M \vec{R} + m_2 \vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}$$

$$\text{⑤} - m_1 \times \text{④} \text{ 可得 } \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}$$

$$\text{故 } \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{r}}_1|^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\frac{1}{2} m_2 |\dot{\vec{r}}_2|^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2 m_2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} (m_1 + m_2) \dot{r}^2$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \mu = \text{reduced mass}$$

$$\text{因此, } L = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - U(r) \quad \text{--- (6)}$$

由 (6) 式可知, $\frac{dL}{dr_i} = 0$. $i = x, y, z$ (即 R_i 是 cyclic)

$$\text{故 } \frac{dL}{dr_i} = M R_i \text{ 守恆}$$

即質心的動量守恆。這是合乎預期的, ∵

並沒有外力所造之位能!

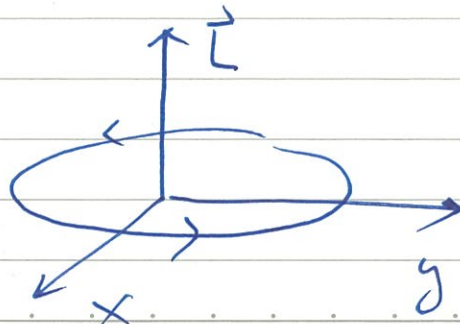
$$\because P_{CM} \text{ 守恆, 可以忽略 } \frac{1}{2} M \dot{R}^2 \text{ 只考慮 } L = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - U(r) \quad \text{--- (7)}$$

即整個問題 ^{如此} 成為一單質點 (質量 = μ) 在 $U(r)$ 之作用下的運動。
由上一單元可知, ∵ U 與 θ 無關

$$L = \vec{r} \times \vec{p} = \text{角動量 守恆}$$

因為 \vec{r} 與 \vec{p} 皆 $\perp L$, 故此質量之運動侷限在

與 L 垂直之平面上:



我們可以再取 $L \parallel z$

則此假想質點在

xy plane 上運動

若在 xy 平面上使用極座標 (r, θ) , 則 $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

$$\text{故 } L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \quad \text{--- (8)}$$

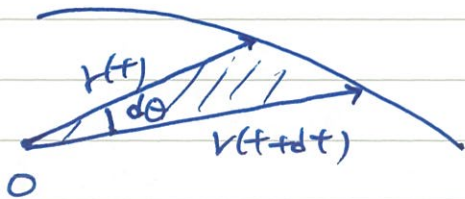
由 (8) 可知 θ 是 cyclic

$$\therefore \frac{dL}{d\theta} = 0, \quad l = \frac{dL}{d\dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{常數} (= P_\theta) \quad \text{--- (9)}$$

$\mu r^2 \dot{\theta} = l$ 即為假想質點之角動量

(9) 式的意義是不僅是 l 之方向固定, 大小 $l = \mu r^2 \dot{\theta}$ 也是常數!

此結果另外一個意義是: 單位時間, 質點掃過之面積固定.



(Kepler's 2nd law)
1609

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta, \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2\mu} = \text{常數}$$

這是角動量守恆的結果與 $\frac{1}{r^2}$ 之力形式無關!

利用 (9) 式, 可以將 $\dot{\theta}$ 消去, 再利用能量守恆, 整個問題成為一維的問題:

$$\begin{aligned} E &= T+U = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) \\ &= \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2}}_{U_{\text{eff}}(r)} + U(r) \quad \text{--- (10)} \end{aligned}$$

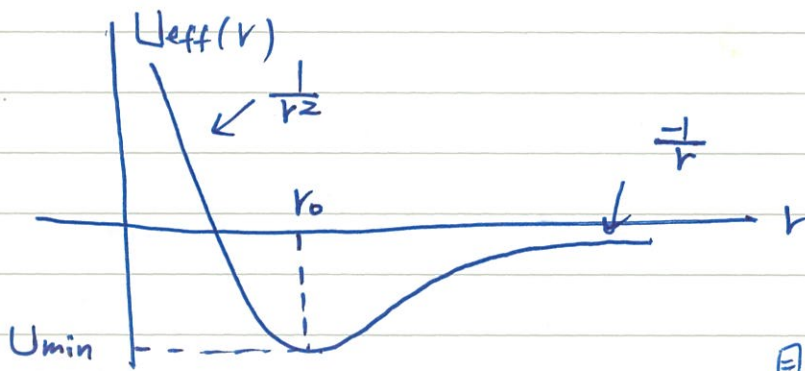
由⑩式可以知道，此一維運動為在 $r \geq 0$ 上之運動，角動量之守恆貢獻了 $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ (斥力) 使得

等效位能為 $U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$ 。其意義是角動量在

量子化下，粒子要靠近 0 ($r \downarrow$)，其動量 p

勢也上升，因能量守恆， \therefore 因無法無限增加，
 動能增加，動能

即相 當有一位能在中心阻擋粒子。其 $U_c = \frac{l^2}{2\mu r^2}$



為阻力之來源，因旋轉有阻，

$F_c = -\frac{dU_c}{dr}$ 又稱為 Centrifugal force (離心力)

則 $U_c =$ centrifugal potential energy

因此，若 $U(r) < 0$ ，則 $U_{eff}(r)$ 可能之形式如上

圖 ($U(r) \propto \frac{1}{r}$)，在 r_0 處造成平衡矣

Equation of Motion

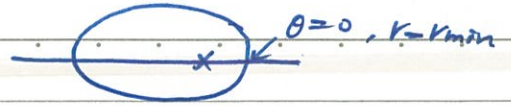
一旦 $U(r)$ 給定，則由⑩式可得

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(\mathcal{E} - U(r)) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}} \quad \dots \text{--- (11)}$$

由此可積分 $\int dt = \int \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(\mathcal{E} - U(r)) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}} \quad$ 得到 $r(t)$

由(12)式

$$\therefore U(r) = -\frac{k}{r}$$



$$\theta(r) = l \int_{r_{\min}}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu E + 2\mu k/r - l^2/r^2}}$$

$$= l \int_{r_{\min}}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{-(\frac{l}{r} - \frac{\mu k}{l})^2 + C^2}} \quad C^2 = 2\mu E + \mu^2 k^2 / l^2$$

$$= \frac{l}{c} \int_{r_{\min}}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - (\frac{l}{r} - \frac{\mu k}{l})^2 / c^2}}$$

$$l \frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{l}{r}\right) \quad \frac{l}{r} = (\frac{l}{r} - \mu k / l) / c$$

$$\theta(r) = \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int d\cos^{-1}x$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \cos^{-1} \frac{\frac{l}{r} - \mu k / l}{c} - \underbrace{\cos^{-1} \frac{\frac{l}{r_{\min}} - \mu k / l}{c}}_{\theta_0}$$

$$\therefore \frac{l}{r} - \mu k / l = c \cos(\theta + \theta_0)$$

$$r = \frac{l}{\mu k / l + c \cos(\theta + \theta_0)} = \frac{l^2 / \mu k}{1 + \frac{cl}{\mu k} \cos(\theta + \theta_0)}$$

$\theta = 0$ 时 $r = r_{\min}$, 故 $\theta_0 = 0$

$$\varepsilon = \frac{cl}{\mu k} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \quad \text{与用牛顿式推导结果一致!}$$

而在空間軌跡則可以由

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} dr$$

利用 $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$ ($\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{2\mu}$)

及 (11) 式 得到

$$\theta(r) = \int \frac{\pm L/r^2 dr}{\sqrt{2\mu(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}} \quad \dots \quad (12)$$

其中 \pm 号可以以 L 吸收, 是走向 \odot or \ominus 的表现。

若 $F = -\frac{dU}{dr} \propto r^n$, 則 (12) 式中只有 $n=1, -2, -3$ 可以積出以 \sin 或 \cos 表示, 其他的情形, 一般並不可積出。($n=1 \Rightarrow$ 簡諧振盪, $n=-2$, 重力, 靜電力)

以上做法是 將問題轉換為積分問題。

我們仍可以使用 Lagrange 方程式來解:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = 0 \quad \dots \quad (13)$$

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{dU}{dr} = F(r)$$

這裏有一個 trick 可以方程式簡化。使用 $u = \frac{1}{r}$

之變換。 則 $\frac{du}{d\theta} = \frac{-1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = \frac{-1}{r^2} \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}$

$$\therefore \dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \quad \therefore \frac{du}{d\theta} = -\frac{\mu}{L} \dot{r} \quad \dots \quad (14)$$

因此, $\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{u}{l} \dot{r} \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{u}{l} \dot{r} \right) \frac{1}{\dot{\theta}}$

$$= -\frac{u}{l} \frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}} = -\frac{u^2}{l^2} r^2 \ddot{r} = -\frac{u^2}{l^2} \frac{\dot{r}'}{u^2}$$

故 $\dot{r}' = -\frac{l^2}{u^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$, 又 $r\dot{\theta}^2 = \frac{l^2}{u^2} \frac{1}{r^3} = \frac{l^2}{u^2} u^3$

則 (3) 式 $\Rightarrow -\frac{l^2}{u} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{l^2}{u} u^3 = F(1/u)$

$$\therefore \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{u}{l^2} \frac{1}{u^2} F(1/u) \quad \dots (4)$$

即 $\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{u}{l^2} r^2 F(r)$

↓ 作簡諧運動

(5) 式之優點是當 $F \propto \frac{1}{r^2}$, 右式為常數!

Motions in the Coulomb potential (or gravitational potential)

由 (5) 或 (2) 式可以得到當 $F \propto \frac{1}{r^2}$ 時, 質點之

運動軌跡 $\theta(r)$

↖ k
(5) 式來說, $F = -\frac{k}{r^2}$ $\therefore -\frac{u}{l^2} r^2 F(r) = \frac{uk}{l^2}$

$$\therefore \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{uk}{l^2}$$

$$u_p = \frac{uk}{l^2} \quad (\text{particular solution})$$

$$\therefore u_c = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{r} &= \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta + \frac{uk}{l^2} \\ &= A \cos(\theta - \phi) + \frac{uk}{l^2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{A} E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r)$$

$$\mu r^2 \dot{\theta} = \ell, \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{\ell}{\mu r^2} = -\frac{\ell}{\mu} \frac{du}{d\theta}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\ell}{r^2} \right)^2 \left[\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right] + U(r)$$

$$= \frac{\ell^2}{2\mu} u^4 \left[\left(\frac{d\frac{1}{u}}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{u^2} \right] + U\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$\frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 = \frac{\ell^2}{2\mu} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] + U\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$\therefore \frac{\ell^2}{2\mu} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] + U\left(\frac{1}{u}\right) = E \quad \dots \textcircled{17}$$

$$\therefore u = \frac{1}{\alpha} (1 + \varepsilon \cos \theta), \quad \therefore \frac{du}{d\theta} = -\frac{\varepsilon}{\alpha} \sin \theta$$

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 [1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \theta]$$

$$U(r) = -\frac{k}{r} = -k\alpha u$$

$$\therefore \textcircled{17} \text{ 式} \Rightarrow \frac{\ell^2}{2\mu} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 [1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \theta] - \frac{k}{\alpha} (1 + \varepsilon \cos \theta) = E \quad \dots \textcircled{18}$$

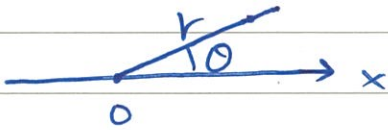
$$\frac{\ell^2}{2\mu} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 = \frac{\ell^2}{2\mu} \frac{\mu^2 k^2}{\ell^4} = \frac{\mu k^2}{2\ell^2}, \quad \frac{k}{\alpha} = \frac{\mu k^2}{\ell^2}$$

$$\therefore \textcircled{18} \text{ 式} \Rightarrow E = \frac{\mu k^2}{2\ell^2} (1 + \varepsilon^2) + \left(\frac{\mu k^2}{\ell^2} - \frac{\mu k^2}{\ell^2} \right) \varepsilon \cos \theta$$

$$\text{故} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\ell E}{\mu k^2}} \quad \dots \textcircled{19}$$

因此，我們得到

取座標讓 x 軸處 $\phi=0$, 則 $\frac{1}{r} = A \cos \theta + \frac{\mu k}{e^2}$



$$\text{故 } \frac{\alpha}{r} = 1 + \epsilon \cos \theta \quad \text{--- (16)}$$

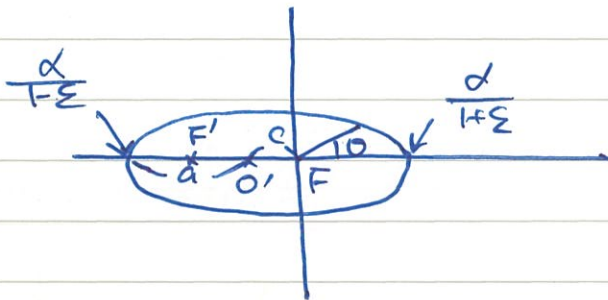
$$\text{其中 } \alpha = \frac{e^2}{\mu k}, \quad \epsilon = \frac{A}{\mu k / e^2}$$

$$\therefore r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

(16) 式之 $r(\theta)$ 描述的為二次曲線。 ϵ 為所謂 離心率 (eccentricity)

(i) 當 $\epsilon=0$, $r = \text{常數} \Rightarrow$ 圓

(ii) $0 < \epsilon < 1$ 時 \Rightarrow 橢圓, 而 O 在其焦點上。



$$\begin{aligned} \text{長軸 } 2a &= \frac{\alpha}{1+\epsilon} + \frac{\alpha}{1-\epsilon} \\ &= \frac{2\alpha}{1-\epsilon^2} \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{\alpha}{1-\epsilon^2}$$

$$\begin{aligned} c &= a - \frac{\alpha}{1+\epsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\epsilon} - \frac{\alpha}{1+\epsilon} \right) \\ &= \frac{\alpha \epsilon}{1-\epsilon^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \epsilon \text{ 為離心率。 } b = \sqrt{a^2 - c^2} = a \sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

if x, y are measured from O' ,

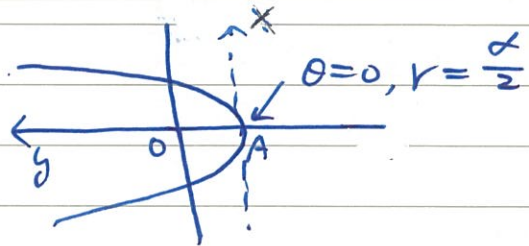
$$\begin{aligned} x &= c + r \cos \theta = \frac{\alpha \epsilon}{1-\epsilon^2} + \frac{\alpha \cos \theta}{1 + \epsilon \cos \theta} \\ y &= r \sin \theta = \frac{\alpha \sin \theta}{1 + \epsilon \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{c + r \cos \theta}{a} = \epsilon + \frac{(1-\epsilon^2) \cos \theta}{1 + \epsilon \cos \theta} \\ \frac{y}{b} &= \frac{\sqrt{1-\epsilon^2} \sin \theta}{1 + \epsilon \cos \theta} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1$$

(iii) $\epsilon = 1$ 時 \Rightarrow 拋物線 $\epsilon = 1$ parabola

$$r = \frac{\alpha}{1 + \cos\theta}$$

$$\theta = \pi \\ r = \infty$$



以 A 為原點,
$$X = r \sin\theta = \frac{\alpha \sin\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{\alpha \cdot 2\sin^2\theta/2 \cos\theta/2}{2\cos^2\theta/2} = \alpha \tan^2\theta/2$$

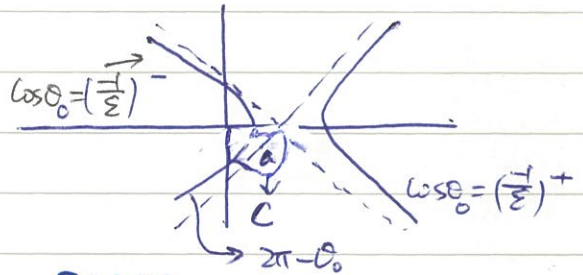
$$y = -r \cos\theta + \alpha/2 = \alpha/2 - \frac{\alpha \cos\theta}{1 + \cos\theta}$$

$$= \frac{\alpha}{2} \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{\alpha}{2} \frac{2\sin^2\theta/2}{2\cos^2\theta/2}$$

$$= \frac{\alpha}{2} \tan^2\theta/2 = \frac{X^2}{2\alpha}$$

(iv) $\epsilon > 1$ 時, $c > a$

$$\therefore b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$$



此時與 (ii) 相似, 只是 $\frac{x}{a} = \frac{\epsilon + \cos\theta}{1 + \epsilon \cos\theta}$

$$\frac{y}{b} = \frac{\sqrt{\epsilon^2 - 1} \sin\theta}{1 + \epsilon \cos\theta}$$

$$\therefore \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{1}{(1 + \epsilon \cos\theta)^2} \left[\underbrace{\epsilon^2 + 2\epsilon \cos\theta + \cos^2\theta - \epsilon^2 \sin^2\theta + \sin^2\theta}_{\epsilon^2 \cos^2\theta + 2\epsilon \cos\theta + 1} \right] = 1$$

\Rightarrow 雙曲線

E 與 ϵ 之關係

能量顯然與 ϵ 有關: $E < 0$; bounded motion

$E > 0$, unbounded,

而 ϵ 的範圍決定 bounded 或 unbounded!

$\epsilon > 1$	$E > 0$	Hyperbola
$\epsilon = 1$	$E = 0$	Parabola
$0 < \epsilon < 1$	$U_{\min} < E < 0$	Ellipse
$\epsilon = 0$	$E = U_{\min}$	Circle ($v = v_0$, see page 6-13)

Kepler's laws

aphelion (遠日點)  perihelion (近日點)

以上的解馬義証 Kepler 由經驗歸納的定律

- (i) 行星之軌道是橢圓且太陽是焦點之一
- (ii) 行星單位時間內對太陽掃過之面積為一常數
- (iii) 週期² \propto 長軸³

→ 此式為圓軌道 $E = -\frac{k}{2a}$ 之推廣

$$\text{由 } \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \text{ 可得 } a = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2} = \frac{l^2}{\mu k} \frac{\mu k^2}{-2EL^2} = \frac{k}{2|E|}$$

$\alpha = l^2 / \mu k$ * 即 $E = -\frac{k}{2a}$

$$b = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = \frac{l^2}{\mu k} \sqrt{\frac{\mu k^2}{-2EL}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}$$

$$T = \int_0^T dt = \int_0^T \frac{2\mu}{l} dA = \frac{2\mu}{l} A = \frac{2\mu}{l} \pi ab$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu} = \frac{2\mu}{l} \frac{\pi k}{2|E|} \frac{1}{\sqrt{2\mu|E|}}$$

$$\therefore T = \pi k \sqrt{\frac{\mu}{2}} |E|^{-3/2}$$

$$\text{又另一種 } b = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{1 - \epsilon^2}} = \sqrt{\alpha a}$$

$$\text{故 } T = \frac{2\mu}{l} \pi ab = \frac{2\mu\pi}{l} \sqrt{\alpha} a^{3/2} \therefore T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{l^2} \alpha a^3 = \frac{4\pi^2\mu}{k} a^3$$

為 Kepler's 3rd law

$$\therefore K = G m_1 m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$m_2 = \text{mass of sun} \gg m_1$

$$\therefore \frac{\mu}{K} = \frac{1}{G(m_1 + m_2)} \approx \frac{1}{G m_2}$$

$$\therefore T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \approx \frac{4\pi^2 a^3}{G m_2}$$

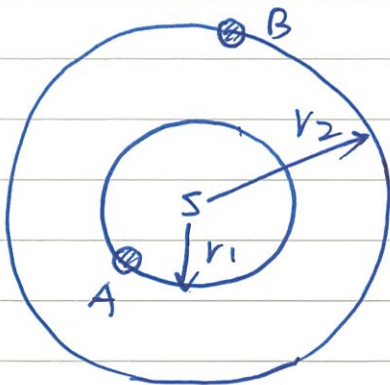
Orbit dynamics & interplanetary transfer (星際旅行)

破文利用以上解出的軌跡，可以使太空船在各行星間的旅行更有效率。

這類問題實際很複雜，但有一些基本的原理。如

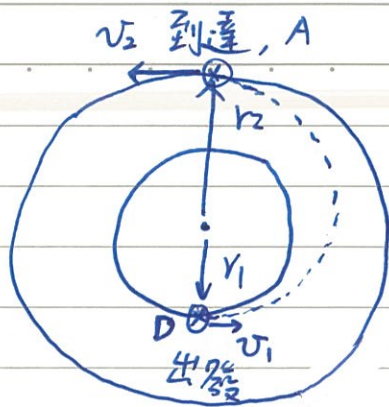
Hohmann transfer (least energy expenditure)

為最簡單仍在 2 個作圓形軌道之星球間旅行的方法。



如在圖所示，如

何由 A 星球到 B 星球？



由圖可知，要做這樣的轉移，
 可得A、D = 橢圓的兩個
 長軸
 頂點。

$$\therefore 2a = r_1 + r_2$$

\therefore 對橢圓軌道而言

$$E = \frac{-K}{2a} = \frac{-K}{(r_1 + r_2)} = \frac{1}{2} m v_{t1}^2 - \frac{K}{r_1}, \quad v_{t1} \text{ 為轉移時之速度}$$

$$\text{而原先在 } r_1 \text{ 軌道之 } E = -\frac{K}{2r_1} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{K}{r_1}$$

v_1 為轉移前之速度

$$\therefore \frac{1}{2} m v_{t1}^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{K}{2r_1} - \frac{K}{(r_1 + r_2)}, \quad \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{K}{2r_1}$$

$$\frac{1}{2} m v_{t1}^2 = \frac{K}{r_1} - \frac{K}{(r_1 + r_2)} = \frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)} K$$

$$\text{故 } v_{t1} = \sqrt{\frac{2K}{mr_1} \frac{r_2}{r_1 + r_2}} \quad \dots \quad (20)$$

\therefore 太空船中須提供

$$\Delta v = v_{t1} - v_1 \quad \text{之速度差!}, \quad v_1 = \sqrt{\frac{K}{mr_1}}$$

當太空船到達A點時，為了使其能在 r_2 之圓上

運動，中須減速。

$$\text{由 } \frac{-K}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2} m v_{t2}^2 - \frac{K}{r_2}$$

$$\text{及 } \frac{-K}{2r_2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{K}{r_2}$$

$$\text{可知 } \frac{1}{2} m v_{t2}^2 = \frac{K}{r_2} - \frac{K}{r_1 + r_2} \quad \therefore v_{t2} = \sqrt{\frac{2K}{mr_2} \frac{r_1}{r_1 + r_2}} \quad \dots \quad (21)$$

$\therefore \Delta V_2 = V_2 - V_{2t}$, 其其須時 $\frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{K}} (a)^{3/2}$
 須減速 $= \pi \sqrt{\frac{m}{K}} (r_1 + r_2)^{3/2}$

以地球與火星 (Σ管≈0) 為例,

$$\frac{m}{K} = \frac{m}{GmM_{sun}} = \frac{1}{GM_{sun}} = \frac{1}{6.67 \times 10^{-11} \times 1.99 \times 10^{30}}$$

$$= 7.53 \times 10^{-21} \text{ s}^2/\text{m}^3 \quad , \quad \frac{K}{m} = 1.33 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

$$a = \frac{1}{2} (1.5 \times 10^{11} + 2.28 \times 10^{11}) = 1.89 \times 10^{11} \text{ m}$$

$$t = \frac{T}{2} = 2.24 \times 10^7 \text{ s} = 259 \text{ 天}$$

而 $V_1 =$ 地球繞太陽平均速度 $= \sqrt{\frac{1.33 \times 10^{20}}{1.5 \times 10^{11}}} = 29.8 \text{ km/s}$

$$V_{1t} = \sqrt{\frac{2 \times 1.33 \times 10^{20} \times 2.28 \times 10^{11}}{1.5 \times 10^{11} \times 3.78 \times 10^{11}}} = 32.7 \text{ km/s}$$

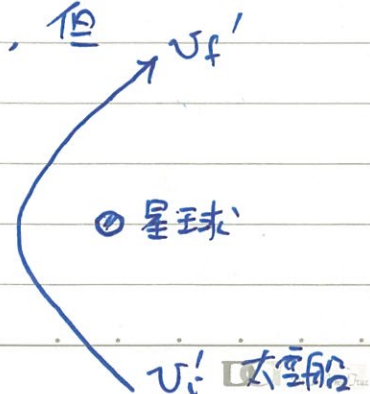
(20)

$\Delta V_1 = 2.9 \text{ km/s}$ 為太空船相對地球之速度

Gravity assistance

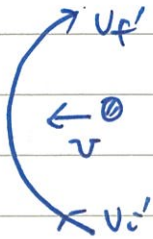
太空船也可以利用行星的引力來加速, 但
 必須適當的選擇走的軌跡。

如圖所示, 對行星而言, 太空船
 $\therefore E > 0$, \therefore 其軌跡為雙曲線
 若星球固定, 則 $v_i' = v_f'$

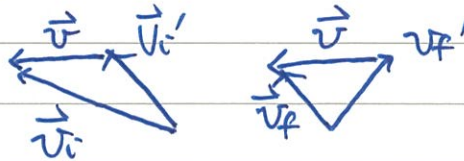


此時 速度並未增加。

但如果星球有有 運動，則可分為 2 類：

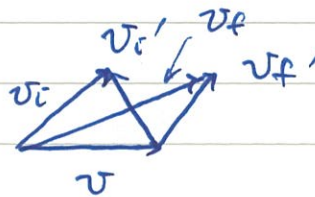
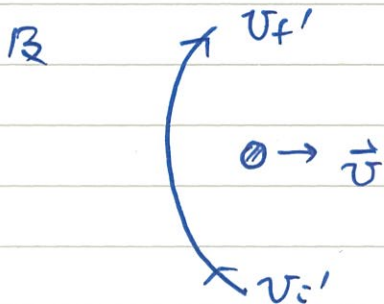


此時



(before the motion of planet)

$$v_f < v_i$$



$$v_f > v_i'$$

(after the motion of planet)

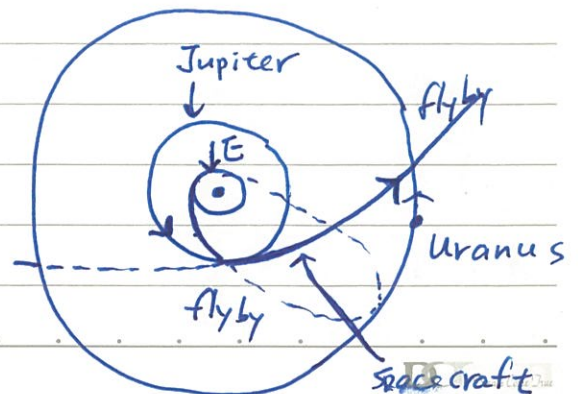
因此，適當的運用可以增加太空船之速度而節省燃料。利用這種 "fly past" 的方式，美國

NASA 的 JPL 在 1970 年代成功發射了 voyagers 1 及 2 並造訪了 Jupiter, Uranus, 及 Neptune, Saturn

見課本之 p. 308-312 之描述。



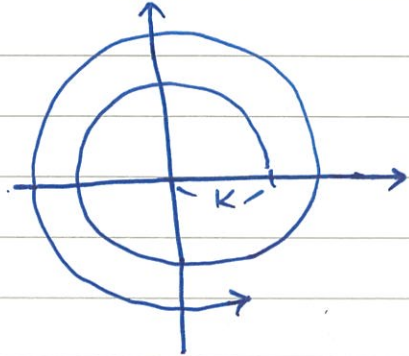
flyby



Motions of other central potentials

一般任意之 central potential, 其中之運動可以非常複雜。

例: Spiral $r = k e^{\alpha \theta}$



則 $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{k} e^{-\alpha \theta}$

$\frac{du}{d\theta} = -\frac{\alpha}{k} e^{-\alpha \theta}$

$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{\alpha^2}{k} e^{-\alpha \theta} = \frac{\alpha^2}{k} \frac{k}{r} = \frac{\alpha^2}{r}$

$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1 + \alpha^2}{r} = -\frac{u r^2}{l^2} F(r)$

故 $F(r) = -\frac{l^2(1 + \alpha^2)}{u} \frac{1}{r^3}$

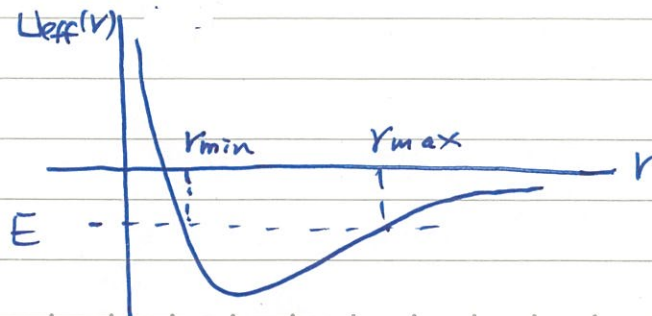
反之, 對於 $\frac{1}{r^3}$ 之力, 軌道可以是 spiral.

在 problem 8.22 中, 可以見到 $\frac{1}{r^3}$ 還允許其他的軌道。

所以, 無法統一歸納所有情形。

不過 U_{eff} 之概念可以大致分析 (i) 運動是否有界 (bounded) (ii) 是否是週期運動。

有界否可由 E 及 $U_{eff}(r)$ 得知



如上圖所示，為一般能有 bounded 運動的情形。

顯然 $E < 0$ 。

但此一情況不同，質點雖然在 $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ 間運動，並非單純的往返，主要還有 θ 變換之故，所以軌跡可以是



$$r_1 = r_{\min}$$

$$r_2 = r_{\max}$$

因此，如果運動有週期性則

$$\Delta\theta \equiv 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L/r^2 dr}{\sqrt{2\mu(E-U-\frac{L^2}{2\mu r^2})}}$$

($r_{\max} \rightarrow r_{\min}$ 与 $r_{\min} \rightarrow r_{\max}$ 对称， θ 改变一样)

$$\Delta\theta = 2\pi \times \frac{m}{n}, \quad n, m = \text{整数} \longrightarrow \text{才是}$$

週期運動。否則為 open 軌道

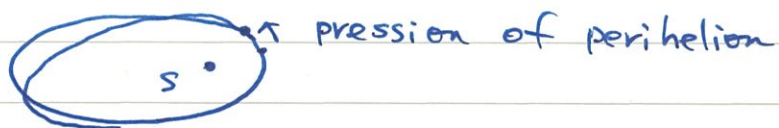
若 $U(r) \propto r^{n+1}$ ，則只有 $n=1$ 及 -2 (problem 8-35)

才是週期封閉軌道。
真

Precession

太陽系之行星所受重力不僅只有來自太陽，其他行星也會造成微擾。因此， $F(r)$ 就不會正好是 $\frac{k}{r^2}$ ！

Newton 最早考慮了 $\frac{k}{r^2}$ 之微小修正，指出若 F 不正好是 $\frac{k}{r^2}$ ，則行星之近日點不會固定而有 precession 的現象。



要了解何以有 precession，最簡單的方法是先了解當 $F = \frac{k}{r^2}$ 時，除了角動量外，還有所謂 Runge-Lenz vector, \vec{A} ，是守恆的：

$$\begin{aligned}
 \text{由 } \vec{\dot{p}} &= F(r) \frac{\vec{r}}{r} \text{ 可得} \\
 \vec{\dot{p}} \times \vec{r} &= \frac{mF(r)}{r} [\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\dot{p}})] \\
 &= \frac{mF(r)}{r} \left[\underbrace{\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\dot{p}})}_{\parallel} - r^2 \vec{\dot{p}} \right] \\
 &= mF(r) r^2 \left[\frac{\vec{r} \dot{p}}{r^2} - \frac{\vec{\dot{p}}}{r} \right] \\
 &= -mF(r) r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad \text{--- (21)}
 \end{aligned}$$

$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \therefore$ (21) 式又可寫為

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{L}) = -mF(r) r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad \dots (22)$$

由 (22) 式可知, 當 $mF(r)r^2 = \text{常數}$,

即若 $F(r) = \frac{-k}{r^2}$ 時,

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{L}) = mk \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

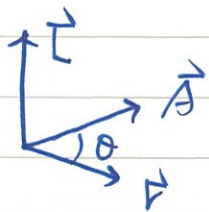
則除了 $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ 外

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{p} \times \vec{L} - m \left\langle \frac{\vec{r}}{r} \right\rangle \right) = 0 \quad \dots (23)$$

$\therefore \vec{A} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m} - \frac{k}{r} \vec{r}$ 是守恆的!

\vec{A} 即為 Runge-Lenz vector.

$\therefore \vec{A} \cdot \vec{L} = -\frac{k}{r} \vec{r} \cdot \vec{L} = 0 \therefore \vec{A}$ 與軌跡在同一平面



對橢圓而言, 考慮近日點
($\therefore \vec{A}$ 守恆, 考慮那一點並不重要)

可知 $\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{L} = \vec{v} \times \vec{L} \parallel a$ 軸

$\therefore \vec{r} \parallel a$ 軸

$\therefore \vec{A} \parallel a$ 軸

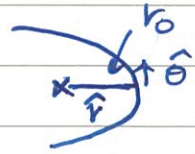
$\therefore \vec{A}$ 是固定的, 則 a 軸及近日點是固定的。

由以上可知, 一旦 F 偏離 $\frac{-k}{r^2}$, 則 \vec{A} 不守恆。

近日點開始移動。

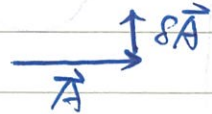
如果 $F = -\frac{k}{r^2} - \frac{\tilde{\alpha}}{r^4}$

則 (2) 式 $\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{A} = \frac{\tilde{\alpha}}{r^2} \frac{d\hat{r}}{dt}$



在近日點附近, $d\vec{A} = \frac{\tilde{\alpha}}{r_0^2} d\hat{r}$

$d\hat{r} = d\theta \hat{\theta}$



$\therefore \delta\vec{A} = \frac{\tilde{\alpha} d\theta}{r_0^2} \hat{\theta}$, 故近日點 precession!

太陽系中以水星之 precession 最大 $574''/100$ 年。

若將其他行星之影響考慮, 可得 $531''/100$ 年, 仍有 $43''/100$ 年之差一直無法解釋。

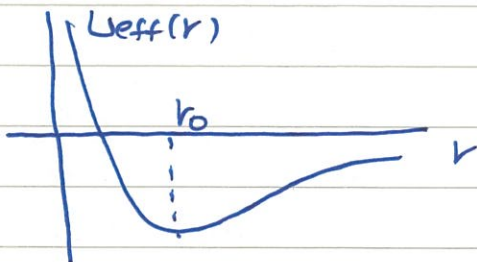
一直到 Einstein 之廣義相對論提出 $\tilde{\alpha} = \frac{36M^2}{mc^2}$

得到 $43.11'' \pm 0.45''/100$ 年之修正才圓滿解釋。

其細節見 page 312-316 (88.9)

Stability of circular orbits

圓形軌道在向心力場中總是可能的, 問題是其是否穩定?



如左圖所示, 唯一可能是圓形軌道的是 $r=r_0$

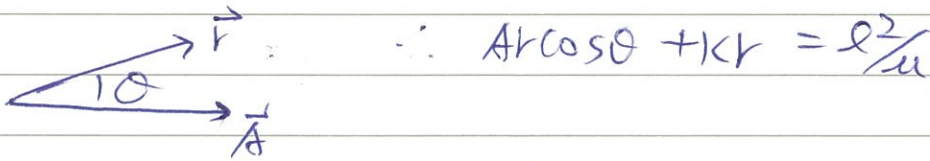
要穩定則 $U'_{\text{eff}}(r_0) = 0$

且 $U''_{\text{eff}}(r_0) > 0$

Precession 之估計

由 Runge-Lenz vector $\vec{A} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{\mu} - \frac{k}{r} \vec{r}$

可得 $\vec{A} \cdot \vec{r} = \frac{L^2}{\mu} - kr$ ($\vec{r} \cdot \vec{p} \times \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \cdot \vec{L} = L^2 = L^2$)



$\therefore \frac{L^2}{\mu r} = k + A \cos \theta$

$\frac{L^2/\mu k}{r} = 1 + \frac{A}{k} \cos \theta$

令 $\frac{d}{r} = 1 + \epsilon \cos \theta$ 比較, $A = k \epsilon$

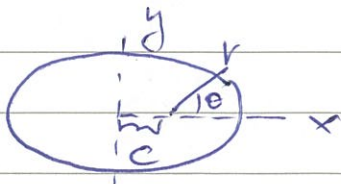
$\epsilon = \frac{L^2}{\mu k}$

現在 $F(r) = \frac{-k}{r^2} - \frac{\partial}{r^4}$ 由 (22) 式可得

$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial}{r^2} \frac{d\vec{r}}{dt} \approx \frac{\partial}{r_0^2} \frac{d\vec{r}_0}{dt} + O(\partial^2)$

r_0 為 $F = -k/r^2$ 之軌道半径

$\therefore \int_0^T \frac{d\vec{A}}{dt} dt = \delta \vec{A} = \oint \frac{\partial}{r_0^2} \frac{d\vec{r}_0}{dt} dt = \oint \frac{\partial}{r_0^2} d\vec{r}_0$



$\therefore x = c + r \cos \theta$

$y = r \sin \theta$

$d\vec{r}_0 = \left(d \frac{c+r \cos \theta}{r_0}, d \frac{r \sin \theta}{r_0} \right) = \left(c d \frac{1}{r_0} + d \cos \theta, d \sin \theta \right)$

其中 $\oint \frac{1}{r_0^2} d\frac{1}{r_0} = 0$

$$\oint \frac{1}{r_0^2} d\cos\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{H\varepsilon\cos\theta}{\alpha}\right)^2 d\cos\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha^2} d\cos\theta$$

$$+ \frac{2\varepsilon}{\alpha^2} \int_0^{2\pi} \cos\theta d\cos\theta$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\cos\theta = 0$$

$$\oint \frac{1}{r_0^2} d\sin\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{H\varepsilon\cos\theta}{\alpha}\right)^2 d\sin\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 d\sin\theta \rightarrow 0$$

$$+ \frac{2\varepsilon}{\alpha^2} \int_0^{2\pi} \cos\theta d\sin\theta$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\sin\theta \rightarrow 0$$

$\underbrace{\cos^2\theta}_{1-\sin^2\theta}$

$$= \frac{2\varepsilon}{\alpha^2} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{2\pi\varepsilon}{\alpha^2}$$

故 (2) $\Rightarrow f_{\vec{A}} = \left(0, \frac{2\pi\varepsilon\vec{\alpha}}{\alpha^2}\right)$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{\vec{A}}}_{\vec{A}}$$

$$\therefore f_{\vec{A}} = (0, A\vec{\theta})$$

$$\therefore f_{\theta} = \frac{2\pi\varepsilon\vec{\alpha}^2}{A\alpha^2} = \frac{2\pi\vec{\alpha}^2}{K\alpha^2}$$

\uparrow
 $A = K\varepsilon$

$$\text{令 } U'(r) = \mu g(r)$$

$$\text{則 } \because U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

$$U'_{\text{eff}}(r_0) = \mu g(r_0) - \frac{l^2}{\mu r_0^3} = 0$$

$$g(r_0) = \frac{l^2}{\mu^2 r_0^3} \quad \dots \textcircled{24}$$

$$U''_{\text{eff}}(r_0) = \mu g'(r_0) + \frac{3l^2}{\mu r_0^4} > 0$$

$$\therefore \mu g'(r_0) + \frac{3\mu g(r_0)}{r_0} > 0 \quad \rightarrow \text{即 } \frac{F'(r_0)}{F(r_0)} + \frac{3}{r_0} > 0$$

$$\text{故穩定之條件為 } \frac{g'(r_0)}{g(r_0)} + \frac{3}{r_0} > 0 \quad \dots \textcircled{25}$$

(r_0 滿足 $\textcircled{24}$ 式)

$$\text{以 } F(r) = \frac{-k}{r^n} \text{ 來說 } g(r) = \frac{1}{r^n} \frac{k}{\mu}$$

$$\therefore \frac{g'(r)}{g(r)} + \frac{3}{r} = \frac{-n}{r} + \frac{3}{r} > 0$$

$\therefore n < 3$ 才有穩定的圓形軌道。

(n 無窮) \star 注意: 前提是 $l \neq 0$, \therefore 不靜動沒有 stable 軌道

$$\text{例: } U(r) = -\frac{k}{r} e^{-r/a} \quad k > 0, a > 0 \quad (\text{Yukawa potential})$$

$$F(r) = -\frac{dU}{dr} = -k \left(\frac{1}{ar} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-r/a}, \quad g(r) = \frac{k}{\mu} \left(\frac{1}{ar} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-r/a}$$

$$\therefore g(r_0) = \frac{l^2}{\mu^2 r_0^3}, \quad k \left(\frac{1}{ar_0} + \frac{1}{r_0^2} \right) e^{-r_0/a} = \frac{l^2}{\mu^2 r_0^3} \quad \dots \textcircled{26}$$

$$\textcircled{26} \text{ 解出之 } r_0 \text{ 必須滿足 } \frac{F'(r_0)}{F(r_0)} + \frac{3}{r_0} > 3$$

$$F'(r_0) = k \left(\frac{1}{a^2 r_0} + \frac{2}{ar_0^2} + \frac{2}{r_0^3} \right) e^{-r_0/a} \quad \therefore \frac{F'(r_0)}{F(r_0)} + \frac{3}{r_0} > 0$$

$$\text{implies } \frac{3}{r_0} - \frac{1/a^2 + 2/ar_0 + 2/r_0^2}{1/a + 1/r_0} > 0$$

$$\text{即 } a^2 + ar_0 - r_0^2 > 0 \quad \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 - \frac{r_0}{a} - 1 < 0$$

$$\frac{r_0}{a} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$$

其中 r_0 滿足 (26) 式。

由於在 (26) 式中，不同的 r 及 a 有不同的 r_0 解

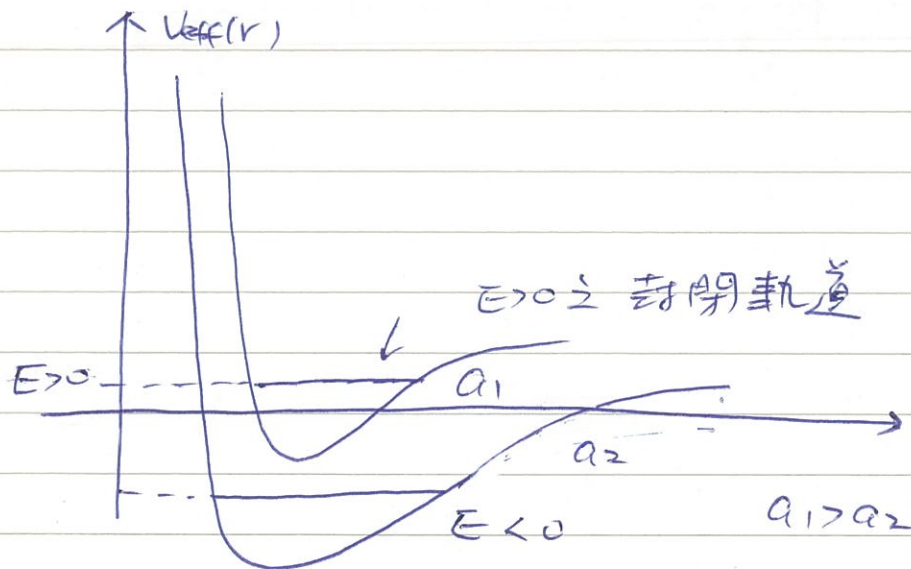
∴ 圓形軌道與 r 值有很大的關係。
穩定

見 page 321 之數值解出來的 $U_{\text{eff}}(r)$ 。

只有 $r_0/a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ， $U_{\text{eff}}(r)$ 才有極小值。

注意如位能允許正能量之封閉軌道

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{k}{r} e^{-r/a} + \frac{l^2}{2mr^2}$$



$a \uparrow$ 負的 $\rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) 變快 ∴ U_{eff} 可令人 > 0

對圓周運動: $u\rho\omega^2 = |F| = \mu g(\rho)$

$$\omega = \sqrt{\frac{g(\rho)}{\rho}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho}{g(\rho)}}$$

$$\omega_0 T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho}{g(\rho)}} \sqrt{\frac{3g}{\rho} + g'(\rho)} = 2\pi \times \frac{\text{正整數}}{\text{正整數}}$$

時軌道為封閉軌道。 $\times \frac{g}{\rho}$ (in general)

$$\therefore \sqrt{3 + \rho \frac{g'(\rho)}{g(\rho)}} = \frac{\text{正整數}}{\text{正整數}}$$

若 $g(r) = \frac{k}{n} \frac{1}{r^n}$, 則 $\sqrt{3 + \rho \frac{g'}{g}} = \sqrt{3-n} = \frac{\text{正整數}}{\text{正整數}}$

$$\therefore n = 2, -1, -6, \dots$$

(in general, $\sqrt{3-n} = (\frac{g}{\rho})^2$, $n \neq \frac{\text{正整數}}{\text{正整數}}$)

Bertrand's theorem (see Goldstein's book, Appendix A)

All bounded orbits are closed

\Rightarrow Central forces: $\frac{k}{r^2}$ & Kr (Hooke's law)
(inverse square)

此定理考慮了 higher orders of perturbation theory!

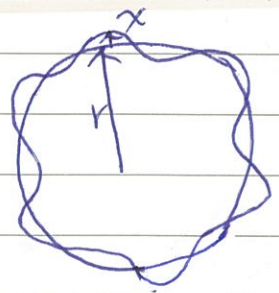
微擾軌道

由 $F(r) = -ug(r)$ 可知

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -g(r)$$

$$\therefore ur^2\dot{\theta} = l \quad \therefore \dot{\theta} = \frac{l}{ur^2}$$

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{u^2r^3} = -g(r) \quad \text{--- (29)}$$



令 $r = p + x$ p 為常數，為圓形軌道之半徑

代入 (29)， $\ddot{r} = \ddot{x}$ ($\therefore g(p) = \frac{l^2}{u^2p^3}$)

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{(p+x)^3} = \frac{1}{p^3} \left(1 + \frac{x}{p}\right)^{-3} \approx \frac{1}{p^3} \left(1 - \frac{3x}{p}\right)$$

$$g(r) = g(p+x) = g(p) + xg'(p)$$

故 (29) 式 $\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{3l^2}{u^2p^4}x + g'(p)x = -g(p) + \frac{l^2}{u^2p^3} \rightarrow 0$

$$\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{3g(p)}{p}}$$

$$\therefore \ddot{x} + \left[\frac{3g(p)}{p} + g'(p) \right] x = 0$$

\therefore 微擾軌道以 $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g(p)}{p} + g'(p)}$ 振盪

當 $\frac{g'(p)}{g(p)} + \frac{3}{p} > 0$ ， $\omega_0 > 0$ ， x 為振盪解

$\therefore p$ 為穩定解，反之 ω_0 為虛數， x 非 " " " "

為 $e^{-|\omega|t}$ 與 $e^{|\omega|t}$ 故 $r=p$ 非穩定解

例

$F = -kr$ 為 2D 之 Harmonic oscillator

如果以 $u = 1/r$ 為變數

$$\text{則 } \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{ku r^3}{l^2} = \frac{ku}{l^2} \frac{1}{u^3} + \text{分難解。}$$

另一個方法則是由

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) \quad U(r) = \frac{1}{2} kr^2 \quad \text{出題}$$

$$\text{得到 } \theta(r) = \int \frac{l/r^2 dr}{\sqrt{2m(E - U(r) - \frac{l^2}{2mr^2})}}$$

$$\text{令 } x = r^2, \quad dx = 2r dr$$

$$\therefore dr = \frac{dx}{2r}, \quad \frac{1}{r} dr = \frac{dx}{2x}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \int \frac{l dx}{x \sqrt{2mEx - mkx^2 - l^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x \sqrt{\frac{-mk}{l^2} x^2 + \frac{2mE}{l^2} x - 1}} \quad \left[\left(\frac{2mE}{l^2} \right)^2 - \frac{4mk}{l^2} > 0 \right]$$

利用 Appendix E, (Eg. 10b)

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \sin^{-1} \frac{bx + 2c}{|x| \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad \text{可得}$$

$$\theta(r) = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[\frac{\frac{mE}{l^2} r^2 - 1}{r^2 \sqrt{\frac{m^2 E^2}{l^4} - \frac{mk}{l^2}}} \right] + \theta_0$$

$$\frac{d'}{r^2} = 1 + \epsilon' \quad \sin 2(\theta - \theta_0) \dots \theta_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{d'}{r^2} = 1 + \epsilon' \cos 2\theta$$

事實上, 這個問題可以在直角座標中較容易處理:

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$m\ddot{y} = -ky$$

$$x = A \cos(\omega t - \alpha)$$

$$\omega^2 = k/m$$

$$y = B \cos(\omega t - \beta)$$

$$\vec{v} = (-A\omega \sin(\omega t - \alpha), -B\omega \sin(\omega t - \beta))$$

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} = -mAB\omega \left[\sin(\omega t - \beta) \cos(\omega t - \alpha) \right. \\ \left. - \sin(\omega t - \alpha) \cos(\omega t - \beta) \right] \hat{z}$$

$$= -mAB\omega \sin \delta \hat{z} \quad \delta = \alpha - \beta$$

$$\therefore \mathcal{L} = -mAB\omega \sin \delta \quad \dots \textcircled{1}$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} k (A^2 + B^2) \quad \dots \textcircled{2}$$

軌跡: $A^2 y^2 + B^2 x^2 - 2ABxy \cos \delta = A^2 B^2 \sin^2 \delta$

令 $y = r \sin \theta$, $x = r \cos \theta$, 可得

$$\frac{A^2 B^2 \sin^2 \delta}{r^2} = A^2 \sin^2 \theta + B^2 \cos^2 \theta - 2AB \sin \theta \cos \theta \cos \delta$$

$$= \frac{A^2 + B^2}{2} + \frac{B^2 - A^2}{2} \cos 2\theta - AB \cos \delta \sin 2\theta$$

$$\frac{2A^2 B^2 \sin^2 \delta}{A^2 + B^2} \equiv \alpha' = \frac{2(\mathcal{L}/m\omega)^2}{2E/k} = \frac{\mathcal{L}^2}{mE}$$

$$\therefore \frac{\alpha'}{r^2} = 1 + \underbrace{\frac{B^2 - A^2}{A^2 + B^2} \cos 2\theta}_a - \underbrace{\frac{2AB}{A^2 + B^2} \cos \delta \sin 2\theta}_b$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \left[\left(\frac{B^2 - A^2}{A^2 + B^2} \right)^2 + \frac{4A^2 B^2 (1 - \sin^2 \theta)}{(A^2 + B^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[1 - \frac{4AB^2 \sin^2 \theta}{(A^2 + B^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{4(\rho/m\omega)^2}{(2E/k)^2}$$

$$= \left[1 - \frac{\rho^2 k}{\mu E^2} \right]^{\frac{1}{2}} \equiv \epsilon'$$

$$\sin \theta_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin 2\theta_0, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos 2\theta_0$$

$$\therefore \frac{\alpha'}{r^2} = 1 + \epsilon' \cos(\theta - \theta_0)$$

θ_0 与 θ 有關係, 但 α', ϵ'

与 θ 無關係!

取 X 軸使 $\theta_0 = 0$

$$\text{則 } \frac{\alpha'}{r^2} = 1 + \epsilon' \cos 2\theta = 1 + \epsilon' (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\therefore \alpha' = x^2 + y^2 + \epsilon' (x^2 - y^2) = (1 + \epsilon') x^2 + (1 - \epsilon') y^2$$

$$\therefore \frac{x^2}{\frac{\alpha'}{1 + \epsilon'}} + \frac{y^2}{\frac{\alpha'}{1 - \epsilon'}} = 1 \quad \because 0 < \epsilon' < 1$$

\therefore 此為橢圓