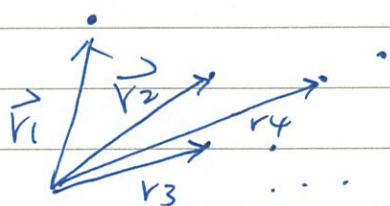


1.1 多質點之力學

General Considerations, 一般的物體皆非單質點, 所以必須考慮多質點系統。當有 N 個質點時, 牛頓力學最精確之描述為先以 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N$ 描述質點之位置, 再寫下運動方程式。



假設只有二體力 (two-body force)

即作用力只與 (i, j) 對有關

則運動方程式為

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \overbrace{\vec{F}_i^e + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}}^{\vec{F}_i} \quad \dots \textcircled{1}$$

$i=1, 2, 3, \dots, N$ (其中 $\vec{F}_i^e$ 為外加力)

一般巨觀的物體 $N \sim 10^{23}$ 解①式基本上是不可能:

以數值方法解①式, 由 $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$, 及 $v_x^i(t), v_y^i(t), v_z^i(t)$

可得
$$v_x^i(t+\Delta t) = v_x^i(t) + \frac{F_x^i(t)}{m_i} \Delta t$$

$$v_y^i(t+\Delta t) = v_y^i(t) + \frac{F_y^i(t)}{m_i} \Delta t$$

$$v_z^i(t+\Delta t) = v_z^i(t) + \frac{F_z^i(t)}{m_i} \Delta t$$

$$x_i(t+\Delta t) = x_i(t) + v_x^i(t) \Delta t$$

$$y_i(t+\Delta t) = y_i(t) + v_y^i(t) \Delta t$$

$$z_i(t+\Delta t) = z_i(t) + v_z^i(t) \Delta t$$

一旦得到 $\vec{v}_i(t+\Delta t)$ 及 $\vec{r}_i(t+\Delta t)$ 即可求 $\vec{v}_i(t+2\Delta t)$ 及 $\vec{r}_i(t+2\Delta t)$

因此，由起始條件 $\{\vec{r}(0), \vec{v}(0), \dots, \vec{r}(0)\}$ 及 $\{\vec{v}(0), \dots, \vec{v}(0)\}$

可以解得 $\vec{r}_i(t)$ 及 $\vec{v}_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, N$)

這裏所牽涉之計算為 6 個加法及 6 個乘法。
 $\uparrow$ 每 Δt $\uparrow$ 至少

(這不包括計算 $\vec{r}_i$ 之運算)

每一個運算至少用一個 clock cycle (電腦 CPU 中有 clock 並送出周期訊號管理計算)

$\therefore$ 對每一 Δt ，至少需 $10^{23} \times 12$ 個 clock cycle

以 1GHz CPU 為例， $12 \times 10^{23} \times 10^{-9} \text{ sec} = 10^{15} \text{ sec} = 10^8 \text{ year!}$
 (- clock cycle = 10^{-9} sec)

注意：Flops (floating-point operations per sec) 是用以量度電腦計算能力的一個指標。所謂之 (FLO, 浮點運算單元) (benchmark) floating-point operation (浮點運算) 是指 $+$, $-$, $\times$, $/$ 等作用在實數之運算。通常的

單位為 MFLOPS (mega-flops), Giga-flops, Tera-flops 及 Peta-flops (10^{15})。

例：Glue Gene 135.5 Tflops

簡易計算機 ~ 10 flops

2006/June 日本 Riken 的 MDGRAPE-3

1 petaflops

$\therefore$ 以此機器， $\Delta t \Rightarrow \frac{12 \times 10^{23}}{10^{15}} \text{ sec} \cong 10^9 \text{ sec} = 100 \text{ year!}$

實際之運算時間需考慮 I/O 及 communication 之時間，故所花時間更長！

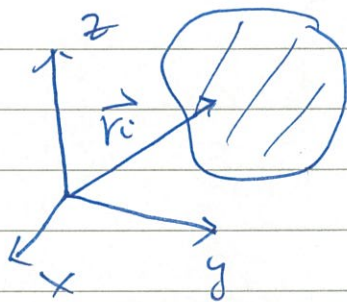
Rigid body (剛體) approximation

由以上可知, 目前的電腦要解出一個物體運動的所有細節是不可能。還好, 在古典物理中, 許多物體之所以成為一^系體, 都滿足所謂的剛體的假設

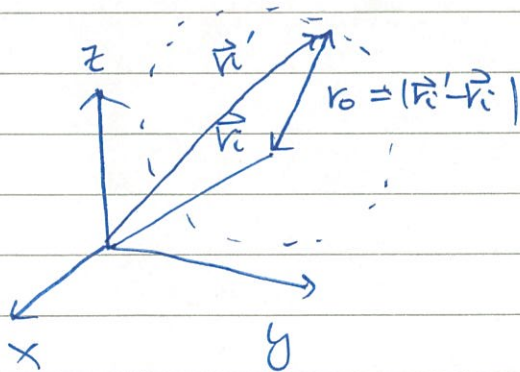
$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{固定} \quad \dots (2)$$

在(2)的假設下, 物體只剩 6 個自由度:

(i) 先任意選一點 $\vec{r}$ (3 個自由度) (ii) 再定下第 2 點 $\vec{r}'$

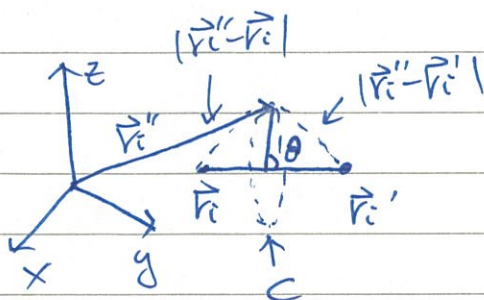


但因為 $|\vec{r} - \vec{r}'| = \text{固定}$, 故 $\vec{r}'$ 之選取並不任意, 只能在 $|\vec{r} - \vec{r}'| = r_0$ 之球面上選。而在球面上, 只有 2 個自由度。



(iii) 最後定第 3 點, $\vec{r}''$

此時因為 $\vec{r}$ 及 $\vec{r}'$ 已定, 且 $|\vec{r}'' - \vec{r}|$ 及 $|\vec{r}'' - \vec{r}'|$ 固定, 故 $\vec{r}''$ 點只能在以 $|\vec{r} - \vec{r}'|$ 為半徑之圓 C 上選擇 (如左圖)



∴ 圓上的點只須描述 θ , 故只要一個自由度。

∴ 一個剛體只要 6 個自由度，其中 3 個為平動之自由度
3 個“旋轉之”

質心座標 與 動量守恒

3 個平動自由度一般以質心的運動來表示。
(Center of mass)

當質心的定義並不侷限於剛體。

船

它代表整個物件的平動運動，即可以將所有的

如果只關心整個物件之平動運動。

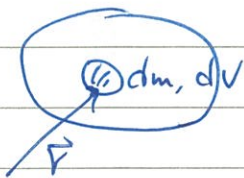
質心視為集中在 C.M. 來討論。

(當然這樣的看法並不是對所有的量(如功)對，
見之後的討論)

$$\text{質心之定義為 } \vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i \quad \dots (3)$$

如果是連續的，則求和改為積分
質心之分布

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad \dots (4)$$



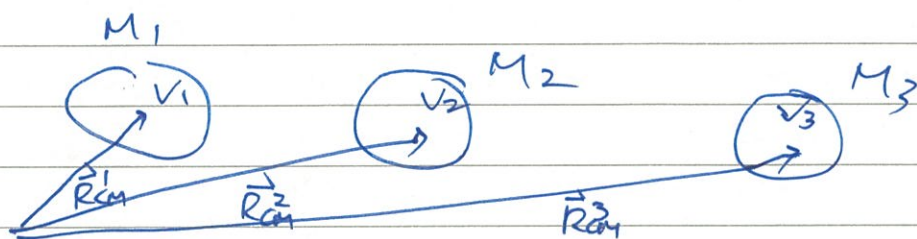
$$\therefore dm = \rho(\vec{r}) dV$$

$$\therefore \vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

$$= \frac{1}{M} \int dx \int dy \int dz \vec{r} \rho(\vec{r}) \quad \dots (5)$$

∴ 求質心中須做 3 維的積分。

質心具有相加性：即多個以上物體之質心
可以分別求之再將物體
視為集中於其質心求之



$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M_1 + M_2 + M_3} (M_1 \vec{R}_{CM1} + M_2 \vec{R}_{CM2} + M_3 \vec{R}_{CM3})$$

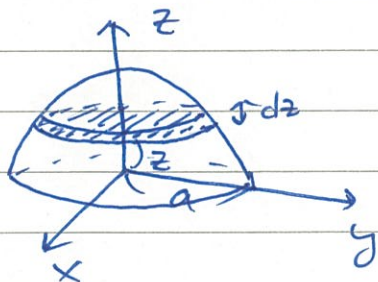
其原因是因為

$$\int_{V_1+V_2+V_3} \rho(\vec{r}) \vec{r} dV = \int_{V_1} \rho(\vec{r}) \vec{r} dV + \int_{V_2} \rho(\vec{r}) \vec{r} dV + \int_{V_3} \rho(\vec{r}) \vec{r} dV$$

$$= M_1 \vec{R}_{CM1} + M_2 \vec{R}_{CM2} + M_3 \vec{R}_{CM3}$$

故由⑤式可得以上結果。

例：均勻半實心球之質心，



先將半球切成許多小圓盤

每一圓盤之質心 = $(0, 0, z)$

$$\text{質量} = \pi r^2 \cdot dz \cdot \rho$$

$$= \rho \pi (a^2 - z^2) dz = dm$$

$$\therefore \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^a dz \underbrace{\rho \pi (a^2 - z^2)}_{dm} \cdot (0, 0, z)$$

$$= \frac{\pi \rho a^4}{4M} = \frac{3a}{8} \quad , \quad M = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} a^3 \cdot \frac{1}{2}$$

由①式可以得

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) = \sum_i \vec{F}_i^e + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij}$$

如果我們假設 $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (weak form of Newton's 3rd law) -- (6)

$$\text{則 } \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} = \sum_{i,j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = 0$$

$$\text{故 } \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) = \sum_i \vec{F}_i^e = \vec{F}^e \text{ (外力總和)}$$

$$M \frac{d^2}{dt^2} \vec{R}_{CM} = \vec{F}^e \quad \dots \quad (7)$$

即可以將外力視為施加在質心之處！
總

$$\text{因此，當外力合} = 0 \text{ 時， } \vec{P}_{CM} \equiv M \dot{\vec{R}}_{CM} = \text{常數}$$

$$\parallel \sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i$$

即系總動量守恒！

$\therefore$ 總動量^{守恒}必須要求內力滿足 weak form of Newton's 3rd law.

能量守恒與質心座標

除了動量可以集中在質心來看，能量守恒在沒有旋轉情形下，也可以以質心來表示。

首先，受力一段時間後，力所作之總功

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \quad \dots (8)$$

其中 1 代表受力前 質點位置 的組態，而 2 則是受力後之組態。

$$\begin{aligned} \because \vec{F}_i &= m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \quad \therefore \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \underbrace{\vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{\vec{v}_i} dt \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) dt = d \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore W_{12} &= \int_1^2 d \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) = \sum_i \left. \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right|_1^2 \\ &= T_2 - T_1 \quad \dots (9) \end{aligned}$$

即 力 所作之總功 W 仍 = 總動能差 (功能定理)

如果所有的力都是保守力，則

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^e + \sum_j \vec{F}_{ij}$$

$$\vec{F}_i^e = -\vec{\nabla}_i U_i$$

$$\vec{\nabla}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right)$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i U_{ij}$$

$$i=1, 2, 3, \dots$$

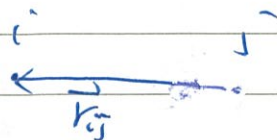
$$\therefore \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^e \cdot d\vec{r}_i = - \sum_i \int_1^2 \underbrace{\vec{\nabla}_i U_i \cdot d\vec{r}_i}_{dU_i} = - \sum_i U_i \Big|_1^2$$

$$\dots (10)$$

$$\sum_i \int_1^2 \sum_j \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i \neq j} \int_1^2 \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i$$

$$= \sum_{i < j} \int_1^2 \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij} &= 0 \\ \vec{F}_{ij} &= -\nabla_i \bar{U}_{ij} \\ \sum_{i < j} \int_1^2 \vec{F}_{ij} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) &= \sum_{i < j} \int_1^2 \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} \end{aligned}$$



$\bar{U}_{ij}$ 只与 i 及 j 之相对距离有关 即 $\bar{U}_{ij} = \bar{U}(r_{ij})$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{U}_{ij} &= \frac{\partial \bar{U}(r_{ij})}{\partial x_{ij}} \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_i} & x_{ij} &= x_i - x_j \\ &= \frac{\partial \bar{U}(r_{ij})}{\partial x_{ij}} \end{aligned}$$

$$\therefore -\nabla_i \bar{U}_{ij} = -\nabla \bar{U}(r) \Big|_{r=r_{ij}}$$

$$-\nabla_i \bar{U}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = -d\bar{U}(r_{ij})$$

$$\therefore \sum_i \int_1^2 \sum_j \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = - \int_1^2 \sum_{i < j} d\bar{U}(r_{ij})$$

$$= - \sum_{i < j} \bar{U}_{ij} \Big|_1^2 \quad \dots \quad (11)$$

⑩ 及 ⑪ 式 告訴我們

$$\sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = - \sum_i \bar{U}_i \Big|_1^2 - \sum_{i < j} \bar{U}_{ij} \Big|_1^2$$

故 $U_{12} = U_1 - U_2 \quad \dots (12)$

$$U = \sum_i U_i + \sum_{i < j} \bar{U}_{ij}$$

由 (9) 及 (12) 式可得

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2$$

故 $T + U = \text{常數} = \text{總能量} \equiv E \quad \dots (13)$

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_i U_i + \underbrace{\sum_{i < j} \frac{1}{2} \bar{U}_{ij}}_{\text{internal potential energy}} \quad (\text{或 } \sum_{i < j} \bar{U}_{ij})$$

internal potential energy

對 rigid body 來說, r_{ij} 是固定長

故 $\sum_{i < j} \bar{U}_{ij} = \sum_{i < j} U(r_{ij})$ 為一常數, 可被忽略,

因此,

$$E^{\text{剛體}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \underbrace{\sum_i U_i}_{\text{外力所造成之位能}} \quad \dots (14)$$

質心座標

外力所造成之位能 = U^{ext}

當物體所受之淨外力^恒為零時,

$\sum_i \vec{F}_i^{\text{e}} = 0$, 由以上討論可知 $\sum_i \vec{P}_i = \text{常數}$

即質心之動量守恒

當 $\sum \vec{F}_i = 0$ 恒為零時, $\sum U_i = \text{常數}$ ($\sum (d_i U_i)$ 才為零),

故剛體的總能量為動能,
基址

$$E = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = T$$

然而卻不能像動量一樣只考慮質心之動能:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i', \quad \vec{v}_i' \text{ 為相對質心之速度}$$

$$\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{cm}^2 + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i' + \vec{v}_i'^2)$$

$$= \frac{1}{2} M \vec{v}_{cm}^2 + \vec{v}_{cm} \cdot \sum m_i \vec{v}_i' + \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2$$

$$\text{其中 } \sum m_i \vec{v}_i' = \frac{d}{dt} \sum m_i (\underbrace{\vec{r}_i - \vec{r}_{cm}}_{\text{相對質心之位移}}) = \frac{d}{dt} \left[\left(\sum m_i \vec{r}_i \right) - M \vec{r}_{cm} \right]$$

$$= 0 \quad \left[\frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i = \vec{r}_{cm} \right]$$

$$\text{故 } T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = T_{cm} + T', \quad T_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

(15)

T' 為相對質心之動能

因此, 只有 T' 固定時 (即沒有轉動), 才可只考慮質心之動能。

作功与质心位移

以上的仔細討論主要在說明在那些情況下才能以質心代表整個物體。

一個很重要的反例是：外力所受之總功並不

能將外力集中於質心計算對質心所作之功。

$$W = \sum_i \int \vec{F}_i^e \cdot d\vec{r}_i$$

$$\therefore d\vec{r}_i = d\vec{R}_{CM} + d\vec{r}_i'$$

↑

相對質心之位移

$$\therefore W = \int \left(\sum_i \vec{F}_i^e \right) \cdot d\vec{R}_{CM} + \sum_i \int \vec{F}_i^e \cdot d\vec{r}_i'$$

$$= \underbrace{\int \vec{F}^e \cdot d\vec{R}_{CM}}_{W_{CM}} + W' \quad \dots (16)$$

W_{CM} 為 將外力集中質心所作之功

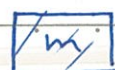
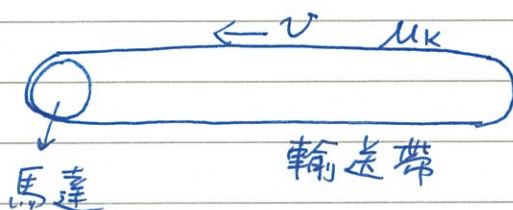
W' 並不在其之內。

只有當 $\vec{F}_i^e$ 與 i 無關 (如重力), $\vec{F}_i^e \equiv \vec{F}^e$
(或 $\vec{F}_i^e \perp d\vec{r}_i'$)

$$W' = \vec{F}^e \cdot \underbrace{\int \sum_i d\vec{r}_i'}_{=0} = 0$$

由此可得外力集中在質心計算功。

例

 木塊


一木塊掉落由馬達帶動之輸送帶後不久以 v 向前行進
則馬達所作功 = ?



如左圖，木塊受力為 $f_k = \mu_k mg$

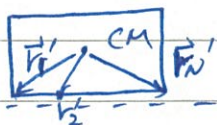
f_k 對質心所作之功 $\overset{W_{cm}}{=} f_k d$

(d = 木塊由靜止加速到 v 所
行經之距離)

$$f_k d = \frac{1}{2} m v^2 \quad \therefore \quad W_{cm} = \frac{1}{2} m v^2$$

如果木塊是剛體，則 (1b) 式中之 $W' = \sum \int \vec{f}_k \cdot d\vec{r}'$

其中 $\vec{r}'$ 是木塊與輸送帶所有
接觸點相對質心之位置向量



$\therefore f_k = \text{常數}$ 且 $\vec{r}', \dots, \vec{r}'$ 是固定的
(沒有轉動)

$$W' = f_k \cdot \sum \int d\vec{r}'$$

$$= 0 \quad (d\vec{r}' = 0)$$

故完全剛體而言， $W = \frac{1}{2} m v^2$

然而，因為木塊作等速運動，故摩擦 force 之貢獻

完全成為熱能且 $W' = \int_0^t f_k v' dt' = f_k d = \frac{1}{2} m v^2$

因此，對真實之木塊，motor 所作之功 $P = \sum \int \vec{f}_k \cdot \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \vec{f}_k \cdot \vec{v}$

$= \frac{1}{2} m v^2 \times 2 = m v^2$ (此結果與直接計算馬達所作之功一樣)

兩粒子之碰撞 (collision) 問題

在平移自由度相關最簡單之問題為粒子

之碰撞問題，而利用碰撞之後的散射 (scattering)

也是實驗上用以探討物質結構的重要方法。

此時，動量及能量守恒能在不知粒子交互作用

細節下提供相當多之資訊。

粒子

LAB frame : 對平移對稱的系統 (即無外力，只有短程)，
二個粒子之碰撞只與其相對速度有關。

因此，我們可以取一座標，使其中一個粒子之

初速為零，此即 LAB frame，為通常散射實驗

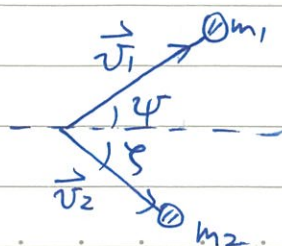
的設定 (setup) :

$m_1 u_1$
① $\rightarrow$
(入射粒子)

$m_2 u_2 = 0$
②
(target, 靶)

碰撞前
(u 即為其
相對速度)

碰撞問題之核心在求碰撞後粒子之速度 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$



然而真實的木塊並非完全剛體，故 $\omega' \neq 0$ 。

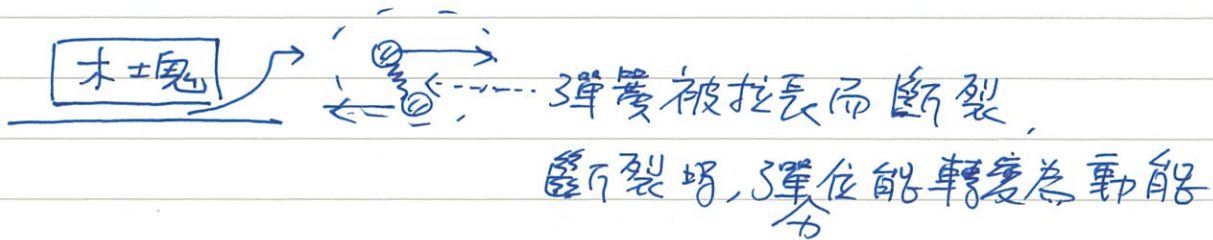
且 ω' 成為木塊之熱能 (E_{th})。

(在此，熱能為微觀原子振動之能量)

微觀來看，木塊與輸送帶介面間的分

子不斷的鍵結再分離，因而得到振動

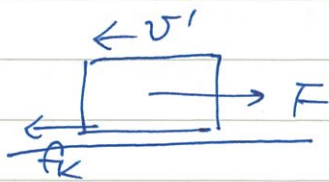
的能量 (如左下圖所示)，即 $\omega' = E_{th} \neq 0$ ：



很明顯的，彈簧之結合再斷裂率只與木塊
與輸送帶之相對速度 v' 有關，故 E_{th} 只

與 v' 有關。∴欲求 E_{th} ，可以考慮一特例：即

木塊與輸送帶之相對運動為等速度 v' 運動，



為達成此運動，可在每一質點
施一外力 (如重力)，如此，其合
相同

力 $F = f_k$ ，木塊才能作等速運動。因為每一

質點所受之力相同，故 $\omega'_F = \frac{F}{N} \sum_i \int d\vec{r}'_i$ ，∴ $\sum_i \vec{r}'_i = 0$
particle 數目

∴ $\omega'_F = 0$

因此，只有摩擦力貢獻 ω' 。

例 有一均勻圓盤，整體以

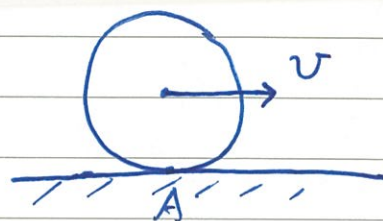
初速 $v = v_0$ ($t=0$) 向右運動

(沒有滾動)，經摩擦作用後

在 $t=t_0$ 時，開始 做

純滾動運動 (rolling without slipping)

求摩擦力所作的功。(設動摩擦係數為 μ_k)



解：

質心運動： $v = v_0 - \mu_k g t$

$$\text{相對質心之角速度 } \omega = \alpha t, \quad \alpha = \frac{\mu_k M g R}{I} = \frac{\mu_k M g R}{\frac{1}{2} M R^2} \\ = \frac{2 \mu_k g}{R}$$

$$\therefore \omega = \frac{2 \mu_k g}{R} t$$

$$t=t_0 \text{ 時, } v = R\omega \therefore v_0 - \mu_k g t_0 = 2 \mu_k g t_0$$

$$t_0 = \frac{v_0}{3 \mu_k g}, \quad \text{此時 } v = v_0 - \mu_k g t_0 = \frac{2}{3} v_0$$

$$\text{質心 } FH \text{ 走之距離 } d_{cm} = v_0 t_0 - \frac{1}{2} \mu_k g t_0^2 \\ = \frac{5}{18} \frac{v_0^2}{\mu_k g}$$

$$\text{摩擦力所做之功} = \mu_k g M \cdot d_{cm} = \frac{5}{18} m v_0^2$$

$$\text{圓盤之動能：起始, } E_k = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \downarrow \frac{2}{3} v_0$$

$$\text{最終, } E_k = \frac{1}{2} m \left(\frac{2v_0}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{v}{R}\right)^2 \\ = \frac{1}{3} m v_0^2$$

故摩擦力作功 $\neq \Delta E_k$

而摩擦力对 A 点所作之功

$$W = \int_0^{t_0} v_A \cdot Mg \mu_k dt$$

$$= \int_0^{t_0} \underbrace{(v - R\omega)}_{v_0 - 3\mu_k g t} Mg \mu_k dt$$

$$= M \mu_k v_0 t_0 - \frac{3}{2} M \mu_k^2 g^2 t_0^2 = \frac{1}{3} M v_0^2 - \frac{1}{6} M v_0^2 = \frac{1}{6} M v_0^2$$

$$= \Delta E_k!$$

故对 A 点之功才是总功!

對彈性碰撞 (elastic collision)而言, 守恒量有

動量守恒: $m_1 \vec{u}_1 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$ --- (17)

能 " " : $\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ --- (18)

如果 $\vec{u}_1$ 及 $\vec{v}_2$ 未知, 則 $\vec{u}_1$ 及 $\vec{v}_2$ 決定了一個二維平面, 在此二維平面上, 未知的 $\vec{u}_1$ 及 $\vec{v}_2$ 有 4 個未知數, 而 (17) 及 (18) 式只提供了 3 個方程式, 無法完全決定 $\vec{u}_1$ 及 $\vec{v}_2$ 。只有當碰撞是一維的, $\vec{u}_1$ 及 $\vec{v}_2$ 為 2 個未知, (17) 及 (18) 式正好可以解出 $\vec{u}_1$ 及 $\vec{v}_2$ 。

雖然在一般的情形下, $\vec{u}_1$ 及 $\vec{v}_2$ 無法被完全決定, 但如果知道 $\vec{u}_1$ 或 $\vec{v}_2$ 中某一分量, 則 $\vec{u}_1$ 及 $\vec{v}_2$ 即被完全決定。

由以上的討論可知, 對二維碰撞而言, 使用動量及能量守恒後, 系統只有一個未知量。

要展現此一未知量, 使用質心座標 (即在 (CM)

質心上看整個碰撞問題) 最較好的方法:

CM frame $\vec{U} \equiv \frac{m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{u}_1$ 為質心速度

∴ 碰撞前: $\vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{U}$

碰撞後: $\vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{U}$

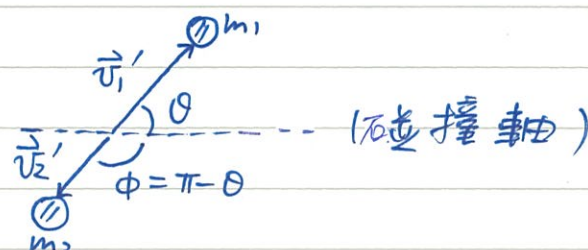
$$\therefore \vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{v} = \frac{m_2 \vec{u}_1}{m_1 + m_2} \quad (19)$$

$$\vec{u}_2' = \vec{u}_2 - \vec{v} = -\vec{v} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{u}_1 \quad (20)$$

使用質心座標之優點為 $m_1 \vec{u}_1' + m_2 \vec{u}_2' = 0$
 $m_1 \vec{u}_1' + m_2 \vec{u}_2' = 0$

因此，碰撞前後，速度皆在一直線上：

碰撞前：

碰撞後：

此時能量守恆： $\frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2$

很明顯的， $u_1' = u_1'$ 是一個解，整個問題 --- (21)
 $u_2' = u_2'$

只剩下未定 (即 $\vec{u}_1'$ 或 $\vec{u}_2'$ 之方向) 分析 (17) 及 (18) 式
一個

之結論 (4個未知數，3個方程式，有一個未知數未定)

一致，因此，即整個碰撞待求的問題！

θ 的求出與兩粒子之交互作用細節有關，我們
將在下一節討論！

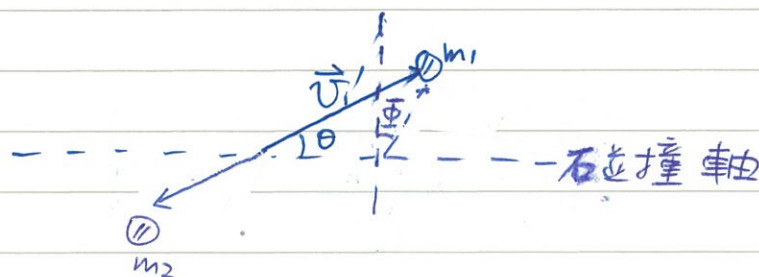
3維碰撞：真實的碰撞發生在3維，因此， $\vec{v}_i$ 及

$\vec{v}_f$ 共有 6個未知數，(17) 及 (18) 共有 4 個方程式，

故應有 2個未知數未定。除了 θ 外，另一個擬定參數為用

以前所說 $\vec{v}_i$ 及 $\vec{v}_f$ 決定的平面：其相對碰撞軸的

角度 Φ 即為第2個參數，如下圖所示，



LAB 與 CM 座標之轉換

雖然 CM 座標分析比較容易，然實驗是在 LAB 座標進行的，因此，將其轉換到 LAB 座標有其必要。

(19) 及
對一維而言，由 (2) 式可知

$$|v_1'| = |u_1'| = \frac{m_2 u_1}{m_1 + m_2}, \text{ 因為 } \vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{V}$$

$$|v_2'| = |u_2'| = + \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \quad \text{且} \quad V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1$$

碰撞後 v_1', v_2' 要反向，故 $v_1' = -\frac{m_2 u_1}{m_1 + m_2}$

$$v_2' = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2}$$

$$v_1 = v_1' + v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1$$

$$v_2 = v_2' + v = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1$$

如果 $u_2 \neq 0$, 同樣的分析:

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_2$$

$$u_1' = u_1 - v = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{即將 } u_1 \text{ 換為 } u_1 - u_2$$

$$u_2' = u_2 - v = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)$$

$$v_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)$$

$$v_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)$$

$$v_1 = v_1' + v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2$$

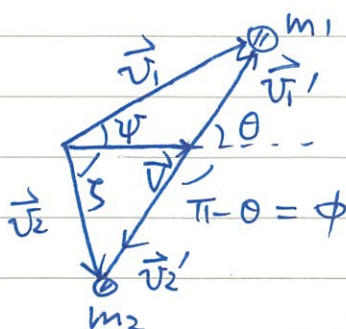
$$v_2 = v_2' + v = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2$$

此即為一般直接解 (17) 及 (18) 式所得到之公式

對 2 維而言: $\therefore \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}$, 故 有以

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}$$

下的圖像



故 $v_i' \sin \theta = v_i \sin \psi$ --- (22)

$$v_i' \cos \theta + V = v_i \cos \psi \quad \dots (23)$$

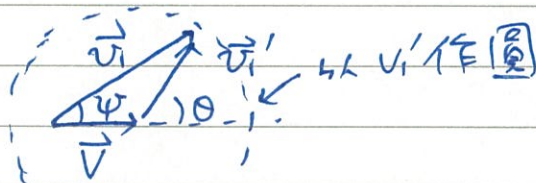
由 (20) 可得 $\tan \psi = \frac{v_i' \sin \theta}{v_i' \cos \theta + V} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + V/v_i'}$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta + m_1/m_2} \quad \dots (24)$$

$$\frac{V}{v_i'} = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{m_2 u_1 / m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

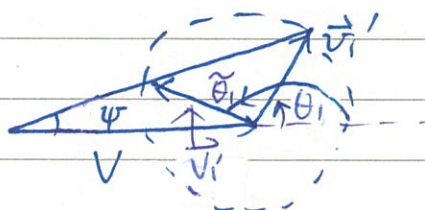
(24) 式連接了 CM 與 LAB 座標。通常是 ψ 可被測量，(24) 式可決定 θ 。($\theta \rightarrow \psi$ unique 但 $\psi \rightarrow \theta$ 非 unique)

當 $m_1 < m_2$ 時， $V/v_i' = \frac{m_1}{m_2} < 1$ ，則由 $\vec{V}$ 及 $\vec{v}_i'$ 只能決定一個 θ 。



此時一個 ψ 對應到一個 θ 。

反之若 $m_1 > m_2$ ，則 $V/v_i' > 1$ ，一個 ψ 可對應到 2 個 θ ，這可以以 v_i' 為半徑作下圖得知



一個 ψ 可對應 2 個 θ (θ_1 及 θ_2)， $\therefore$ 有 2 個 $\vec{v}_i$ 的可能。因此，如果實驗只測角度， θ_1 及 θ_2 皆有可能

(如果 $\vec{v}_i$ 被測得，則只能有一個 θ)

* 注意：一個 ψ 可能對應 2 個 θ 也可由 (24) 式直接得到。

同理

$$v_2 \sin \zeta = v_2' \sin \theta$$

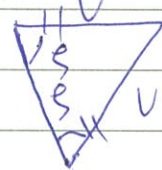
$$v_2 \cos \zeta = U - v_2' \cos \theta$$

$$\therefore \tan \zeta = \frac{\sin \theta}{U/v_2' - \cos \theta}$$

$$\therefore U = v_2' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore \tan \zeta = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2 \sin \theta/2 \cos \theta/2}{1 - (1 - \sin^2 \theta/2)} = \cot \theta/2$$

$$= \tan (\pi/2 - \theta/2) \quad \text{圖像:}$$



$$\text{故 } 2\zeta = \pi - \theta = \phi \quad \dots (25)$$

幾個特例:

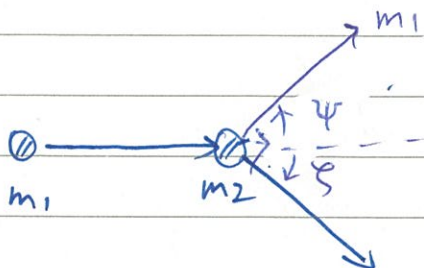
$$m_1 \ll m_2, (24) \text{ 式} \Rightarrow \tan \psi \approx \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

$$\therefore \psi \approx \theta$$

$$\underline{m_1 = m_2}, \quad \tan \psi = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \tan \theta/2$$

$$\therefore \psi = \theta/2 \quad \text{由 (25) 式可知}$$

$$\zeta + \psi = \pi/2, \text{ 故 } \vec{v}_1 \text{ 總是 } \perp \vec{v}_2$$



至於碰撞前後動能之關係，請參卷 5.9-1.

非彈性碰撞：以上為彈性碰撞的理論描述。

一般的碰撞，質心的能量前後不一定守恒——

因為有相對質心能量之牽涉（即內能），此時前後動能和並不固定，為非彈性碰撞。

兩物體之質心

$$\text{此時 (18) 式 以 } Q + \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \text{ -- (26)}$$

取代， Q 是所謂的碰撞 Q -value.

而 $Q=0$ 為彈性碰撞

一旦 Q 給定，之前分析如常，只是 (26) 式要取代 (18) 式即可。

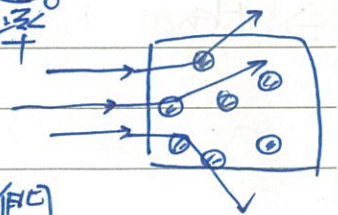
散射截面積 (Scattering cross section)

真實的散射實驗通常不會只涉及 2 個質點，

而是有一群入射粒子（如 α particle）及一堆靶

粒（target）^{（如圖所示）}，因此必須以統計或機率

來分析實驗數據。

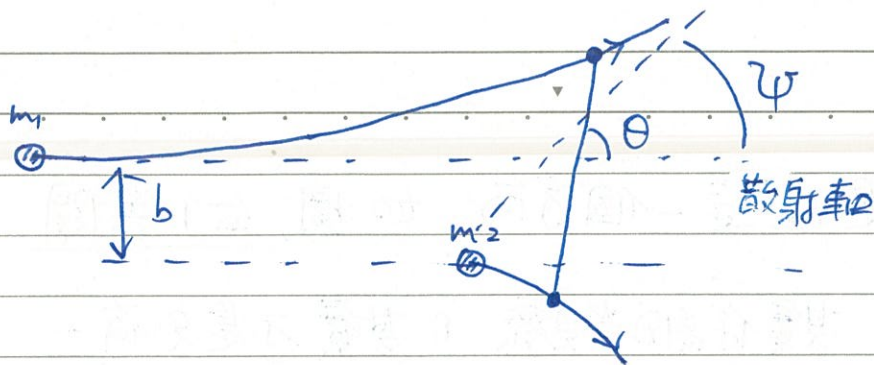


要分析 實驗 散射的數據，首先，我們

注意到對任一對入射粒子及靶，所需要

描述的参数有撞擊參數 (impact parameter) b

及 散射角 (θ) (先以 CM 座標討論)



($\theta = \hat{r}_1 - \hat{r}_2$ 為散射
軸之夾角)

b 為 impact parameter, 描述碰撞標準之準度,
可由角動量及入射動能 $T_0 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$ 得知

$$L = m_1 u_1 b \quad u_1 = \sqrt{2T_0/m_1}$$

$$L = b \sqrt{2m_1 T_0}$$

在真實散射實驗中, 不同對之入射粒子及靶 (m_2) 有
不同之 b 以散射後之 θ , 由 θ 之分佈取得粒
子與粒子之交互作用之關係為主要的目標。

為此, 我們定義 differential scattering cross section

$\sigma(\theta)$ 如下

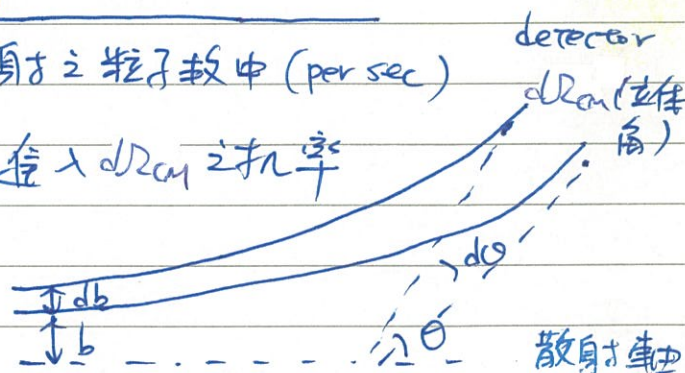
(簡介之條件)

$$d\sigma(\theta) = \frac{\text{由每一靶粒子散射入 } d\Omega \text{ cm}^2 \text{ 之粒子數 (per sec)}}{\text{單位面積中入射之粒子數 (per sec)}}$$

$$= \text{每一 (粒子) 入射進入 } d\Omega \text{ cm}^2 \text{ 之機率}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \sigma(\theta)$$

$d\Omega$ 為 θ 附近之立體角



更精確的說, 若 I 為入射粒子的 flux density (流量)

$$\text{即 } \frac{\text{粒子數}}{\text{sec} \cdot \text{單位面積 (垂直於行方向)}}$$

$$(\vec{j} = \rho \vec{v}, I = j)$$

dN = 單位時間內由單一靶粒子散射入 $d\Omega_{CM}$ 之粒子數

$\therefore dN \propto I$, $\therefore \frac{dN}{I}$ 為每一入射粒子進入 $d\Omega'$ 之
機率 $= d\sigma(\theta) = \sigma(\theta) d\Omega_{CM}$

$$\therefore \sigma(\theta) = \frac{1}{I} \frac{dN}{d\Omega_{CM}} \quad \text{--- (27)}$$

$\therefore \sigma(\theta)$ 之物理意義為每一入射粒子進入 θ 方向單位
立體角之機率。其單位為面積，所以稱為
微分散射截面積，其意義可由 $\frac{dN}{I}$ 理解：

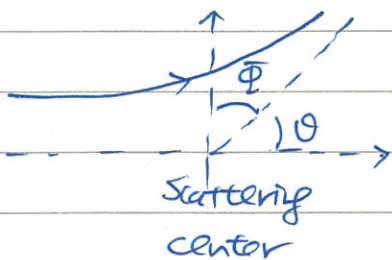
$$I = \frac{\text{粒子數}}{\text{單位面積} \cdot \text{單位時間}}$$

$\therefore \frac{dN}{I}$ 追蹤 (入射粒子) 進入 $d\Omega'$ 之 所佔有之面積

即 $\sigma(\theta)$ 追蹤那些會被散射進入 $d\Omega_{CM}$ 之
等效面積！

當散射具有軸向 (axial) 對稱時，進入 $(\theta, \theta + d\theta)$

之粒子數與 Φ 無關，所以取 $d\Omega_{CM} = \underbrace{2\pi \sin\theta d\theta}_{(\Phi=0 \text{ 到 } 2\pi)}$



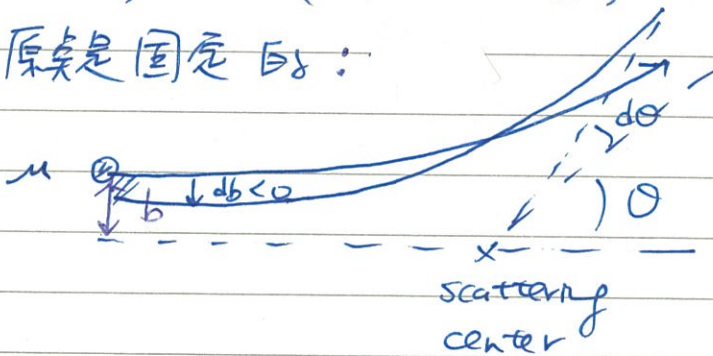
對應 (粒子交互作用) 與相對距離
有關之而言，描述 θ 即描述
與散射軸之夾角：

即若 $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \equiv V(\vec{r})$

系統相當於一以 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 之約化

質量之假想粒子在 $V(\vec{r})$ 中運動

因此，以假想粒子來看，scattering center 為 $\vec{r}$ 之原點是固定的：



因此， $b = b(\theta)$ ，且若作用力為斥力， $b \downarrow$ ， $\theta \uparrow$

故進入 $(\theta, \theta + d\theta)$ 內之粒子源於 $(b, b + db)$ 之區
的入射粒子 ($db < 0$)

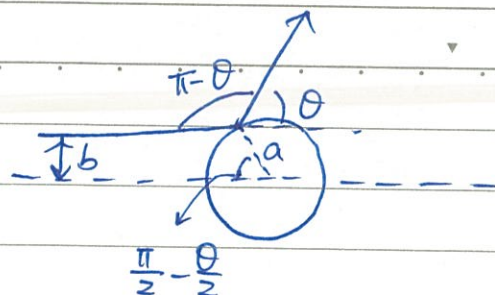
$\therefore$ 這部份之粒子數 $= |I \cdot 2\pi b db|$

$$\begin{aligned} \text{故 } I 2\pi b db &= -dN = -I \langle(\theta) d/2\pi \rangle \\ &= -I \langle(\theta) \cdot 2\pi \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

$$\therefore \langle(\theta) = \frac{-b}{\sin\theta} \frac{db}{d\theta} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad \text{--- (2f)}$$

例：硬球之 $\langle(\theta)$





以上是碰撞後軌跡， $b = a \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})$
 $= a \cos \frac{\theta}{2}$

$$\text{故 } \sigma(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{a \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \cdot \frac{a}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ = \frac{a^2}{4}$$

即各角度之散射機會一樣，直覺一致。

總截面積

σ_t 為各 θ 之微分截面積之和，

表示了可以將散射中心以一等效面積取代。
入射粒子打到此面積才會被散射！

$$\sigma_t = \int \sigma(\theta) d\Omega = \int_0^\pi \sigma(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta$$

以硬球為例， $\sigma(\theta) = \frac{a^2}{4}$

$$\therefore \sigma_t = \frac{a^2}{4} \int_0^\pi 2\pi \sin \theta d\theta = \pi a^2$$

此即硬球之橫截面積，凡是落在此面積之

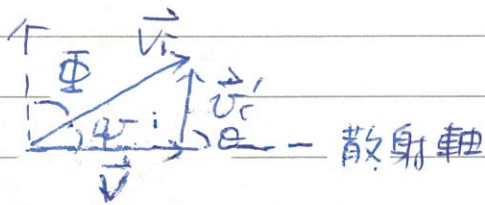
入射粒子皆被散射，反之則不被散射！

LAB 座標

真實的散射實驗，偵測器測到的是進入 ψ 之
粒子數而非 θ 之粒子數 (見 P. 8-22)
進入

因此，我們^們需要將 $\angle(\theta)$ 轉換為 LAB 座標的 $\angle(\psi)$ 。
(注意：在上例中硬球之散射，因為硬球被
固定在 LAB 座標，故 $\angle(\theta)$ 即為 $\angle(\psi)$ ， $\theta = \psi$)

首先，LAB 与 CM 座標之轉換為所有速度
差質心速度 $\vec{V}$ ： $\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{V}$ ， $\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}$



如左圖， $\because \vec{V}$ 平行散射軸，
故 $\vec{v}_i$ 及 $\vec{v}_i'$ 对 散射軸
之夾角不同，但垂角不變。

對同一群粒子， ψ 及 θ 只是二個描述方式，粒子數
一樣，即進入 $(\theta, \theta+d\theta)$ 之粒子數与 進入對應
 $(\psi, \psi+d\psi)$ 之 $(\psi, \psi+d\psi)$ 之粒子數相同：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} d\Omega_{CM} = \frac{d\sigma}{d\Omega_L} d\Omega_L = \frac{dN}{I}$$

LAB frame

$$\text{故 } \frac{d\sigma}{d\Omega_L} = \frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} \frac{d\Omega_{CM}}{d\Omega_L} = \angle(\theta) \frac{\sin\theta d\theta d\Phi}{\sin\psi d\psi d\Phi}$$

$\angle(\psi)$

$$\angle(\psi) = \angle(\theta) \frac{\sin\theta}{\sin\psi} \frac{d\theta}{d\psi} \quad \dots \quad (29)$$

注意：由於 $\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} d\Omega_{CM} = \frac{d\sigma}{d\Omega_L} d\Omega_L$ ，總截面 $\sigma_T = \int \angle(\theta) d\Omega_{CM} = \int \angle(\psi) d\Omega_L$

与座標無關

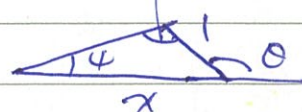
(20) 式並非完整 $\angle(\theta)$ 到 $\angle(\psi)$ 之轉換，完整的

轉換中須將 θ 以 ψ 表示。由 ψ 之

關係藏在 (24) 式：
$$\tan \psi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + m_1/m_2} = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \quad (\theta > \psi)$$

令 $x = m_1/m_2$ ，則 $\sin \psi \cos \theta + x \sin \psi = \sin \theta \cos \psi \rightarrow \theta - \psi$

$$\therefore \frac{\sin(\theta - \psi)}{\sin \psi} = x \quad \text{--- (30)}$$



由 (30) 式可得 $\cos(\theta - \psi) \left(\frac{d\theta}{d\psi} - 1 \right) = x \cos \psi$ $\frac{x}{\sin(\theta - \psi)} = \frac{1}{\sin \psi}$

故 $\frac{d\theta}{d\psi} = 1 + \frac{x \cos \psi}{\cos(\theta - \psi)}$

$$= 1 + \frac{\sin(\theta - \psi) \cos \psi}{\cos(\theta - \psi) \sin \psi} = \frac{\sin \theta}{\cos(\theta - \psi) \sin \psi}$$

(30) 式

代入 (29) 式，故 $\angle(\psi) = \angle(\theta) \frac{\sin^2 \theta}{\cos(\theta - \psi) \sin^2 \psi} \quad \text{--- (31)}$

由 (30) 式 $\times \cos \psi$ 再加上 $\cos(\theta - \psi)$ 可得

$$\frac{\sin(\theta - \psi) \cos \psi}{\sin \psi} + \cos(\theta - \psi) = x \cos \psi + \cos(\theta - \psi)$$

$$\parallel$$

$$\frac{\sin \theta}{\sin \psi}$$

故由 (31) 式 $\frac{\sin \theta}{\sin \psi} = x \cos \psi + \cos(\theta - \psi)$

$\therefore \cos(\theta - \psi) = \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi} \quad \text{(30) 式}$ $\frac{v}{v_1} < 1$
($x < 1$)
 ψ 到 θ 只有一解

故

$$\begin{aligned}\Delta(\psi) &= \Delta(\theta) \frac{[x \cos \psi + \cos(\theta - \psi)]^2}{\cos(\theta - \psi)} \\ &= \Delta(\theta) \frac{[x \cos \psi + \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}]^2}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}}\end{aligned}$$

--- (32)

其中 θ 可由 (30) 式解得

($\theta \in \pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$)

$$\theta = \sin^{-1}(x \sin \psi) + \psi \quad (x < 1) \quad (33)$$

由 (32) 及 (33) 即可得 $\Delta(\psi)$

($x > 1$, 則 $\theta - \psi$ 可 $> \pi/2$)

故另一解為 $\pi - \sin^{-1}(x \sin \psi) + \psi$

幾個特例: $m_1 = m_2$, 即 $x = 1$

$$\text{此時 } \psi = \theta/2, \text{ 即 } \theta = 2\psi, \frac{\sin \theta}{\sin \psi} \frac{d\theta}{d\psi} = 4 \cos \psi$$

$$\text{故 } \Delta(\psi) = \Delta(\theta) \Big|_{\theta=2\psi} \cdot 4 \cos \psi$$

$$m_1 \ll m_2, \theta \approx \psi, \frac{\sin \theta}{\sin \psi} \frac{d\theta}{d\psi} \sim 1$$

$$\therefore \Delta(\psi) \approx \Delta(\theta) \Big|_{\theta=\psi}$$

同心力的散射

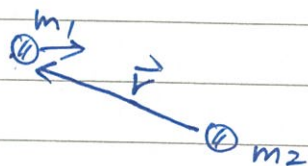
对同心力而言, $\vec{F} = -\nabla U(r)$, 2个质点的问题

可以以质量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 之假想质点在 $U(r)$

影响的问题取代, 即

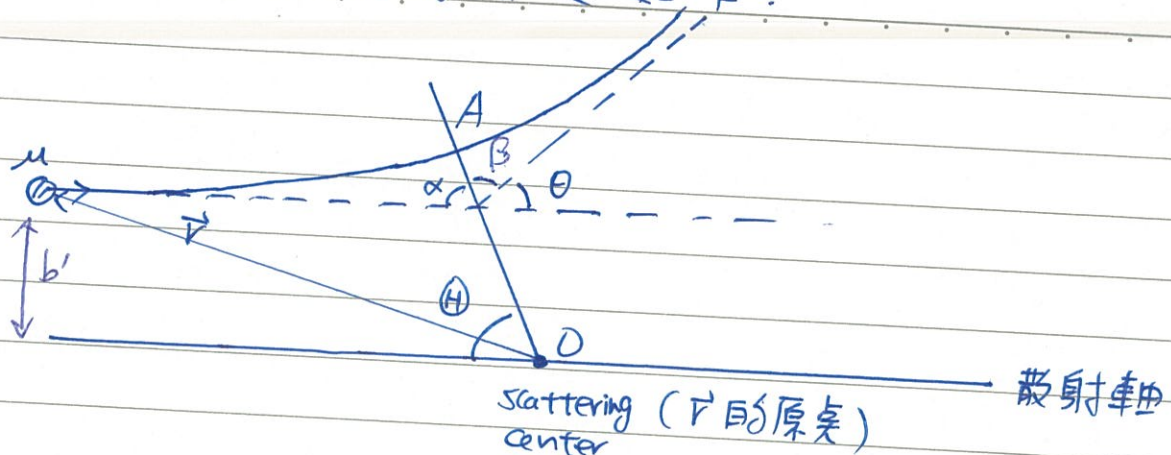
$$L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

(见第6单元, P. 6-11)

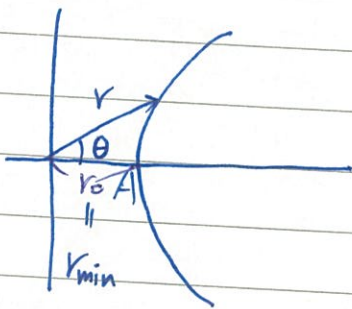


对同心力而言, 角动量守恒, 整个散射过程残留在垂直于 $\vec{L}$ 之平面上, 为二维碰撞问题。

因此，散射的問題可設定如下：



其中 A 點為 m 最接近 scattering center 之點，即 $\overline{OA}$ 為最接近的距離。由於 $U = U(r)$ 為向心力，運動軌跡對 A 點是對稱的，即 $\alpha = \beta$ ：



如左圖，為第 6 單元解重力作用時的座標。
所用 $u = \frac{1}{r}$ 滿足

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = - \frac{U}{\ell^2} r^2 F(r)$$

即 $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = f(u)$, $f(u) = - \frac{U}{\ell^2} \frac{1}{u^2} F(1/u)$
(課本 8.20 式) $\therefore$ (34)

$\therefore \frac{du}{d\theta} = - \frac{u}{\ell} \dot{r} \therefore$ A 點 $\frac{du}{d\theta} = 0$ 即 $\frac{du}{d\theta} \big|_{\theta=0} = 0$ (35)

(34) 為二階微分方程式，其起始條件為 (35)，其解是唯一的。因為 $u(0) = u(\theta)$ 能滿足 $\frac{du}{d\theta} \big|_{\theta=0} = 0$

($\frac{du(0)}{d\theta} = - \frac{du(-\theta)}{d(-\theta)}$ ，令 $\theta=0$ 可得 $u'(0) = -u'(0) \therefore u'(0) = 0$)

由唯一性可知， $u(0) = u(-\theta)$ 是唯一解中須滿足。故對 A 點

是對稱的。由 $\alpha = \beta$, 可知 $\theta = \pi - 2\alpha = \pi - 2\alpha$ (4) ... (36)
 $= \alpha$ 。

當 $r \rightarrow \infty$ 時, $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \rightarrow \infty$, 此時 $\vec{r}$ 固定在 0 點 (此為實驗之 setup), 故 $\vec{r}$ 與散射軸相距 b , 因此 $b' = b$ 。
 $\vec{r}_1$

因此, 對於向心力之散射問題, 所要計算的

是 (4) 中 b 之關係, 而這個關係在解向心力

軌道時已求得: 由 $E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r)$ 出發

解得 $\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r)) - \frac{l^2}{\mu r^2}}$ 再由 $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$ 相除

可得 (見第 6 章之推導)

$$\theta(r) = \int \frac{\pm l/r^2 dr}{\sqrt{2\mu(E - U(r)) - \frac{l^2}{r^2}}}$$

故 (4) = $\int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{l/r^2 dr}{\sqrt{2\mu(E - U(r)) - \frac{l^2}{r^2}}}$, 其中 $l = \mu r^2 \dot{\theta}$... (37)

對假想質點來說, $\mu =$ 質量, 起始速度 $= \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2^0 = \vec{u}_1$

$\therefore$ 起始動能 $T_0' = \frac{1}{2}\mu u_1^2 = E$... (38)

注意:

2 粒子之角動量 $= m_1 u_1 b$ 與 (4) 式 l 不同

l 為假想質點之角動量, $\therefore l = \mu b u_1 = b \sqrt{2\mu T_0'}$... (39)

利用 (38) 及 (39), (40) 式可以簡化為

$$(H) = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b/r^2 dr}{\sqrt{1 - b^2/r^2 - U(r)/T_0}} \quad \dots (40)$$

(40) 式及 (36) 式即描述了向心力場 $U(r)$ 下
散射的問題。

拉塞福散射 (Rutherford scattering)

當 $U(r) = \frac{K}{r}$ 時, (40) 式描述了同性電荷
間的散射。其中 $K = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$, q_1, q_2 為 m_1 及
 m_2 質點所帶之電荷。

拉塞福以此來探討 α -particle 在金箔中
散射的情形。 (即 He^4 原子核)

$U(r) = K/r$ 時, (40) 式可被積分:

利用 $\int \frac{dx}{x \sqrt{AX^2 + BX + C}} = \frac{1}{\sqrt{-C}} \sin^{-1} \frac{BX + C}{x \sqrt{B^2 - 4AC}} \quad (C < 0)$

$$\therefore (H) = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b/r^2 dr}{\sqrt{r^2 - b^2 - Kr/T_0}}$$

$$\therefore A=1, B=-K/T_0, C=-b^2$$

$$\text{故 } (H) = \frac{b}{\sqrt{b^2}} \sin^{-1} \frac{(2b^2 - K/T_0)r}{r \sqrt{K^2/T_0^2 + 4b^2}} \bigg|_{r=\min}^{r=\infty} \quad \dots (41)$$

在 $r_{\min}$ 時, $\dot{r}=0$, $\therefore E=T_0'$, $L=b\sqrt{2\mu T_0'}$, $E=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{L^2}{2\mu r^2}+U(r)$

$$\therefore T_0' = \frac{K}{r_{\min}} + \frac{b^2 \cdot 2\mu T_0'}{2\mu r_{\min}^2} = \frac{K}{r_{\min}} + \frac{b^2 T_0'}{r_{\min}^2}$$

可解得 $r_{\min} = \frac{1}{2} \left(\frac{K}{T_0'} + \sqrt{\left(\frac{K}{T_0'}\right)^2 + 4b^2} \right)$

因此, (4) 中所需估計為

$$\frac{2b^2 + \frac{K}{T_0'} r_{\min}}{r_{\min} \sqrt{\left(\frac{K}{T_0'}\right)^2 + 4b^2}} = \frac{2b^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{K}{T_0'}\right) + \frac{K}{2T_0'} \sqrt{\left(\frac{K}{T_0'}\right)^2 + 4b^2}}{\frac{1}{2} \left(\frac{K}{T_0'} + \sqrt{\left(\frac{K}{T_0'}\right)^2 + 4b^2}\right) \sqrt{\left(\frac{K}{T_0'}\right)^2 + 4b^2}}$$

$$= 1$$

故 (4) 式 $\Rightarrow$ $\Theta = \sin^{-1} \frac{-K/T_0'}{\sqrt{\left(\frac{K}{T_0'}\right)^2 + 4b^2}} = \sin^{-1}(-1)$

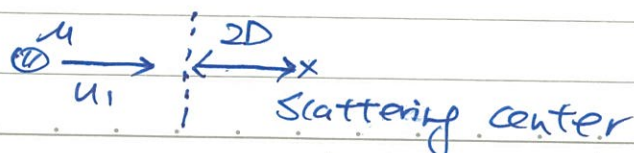
$\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) = \frac{K/T_0'}{\sqrt{\left(\frac{K}{T_0'}\right)^2 + 4b^2}} = \frac{K/T_0' \cdot \frac{1}{b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{K}{bT_0'}\right)^2} \cdot \frac{1}{b^2}}$$

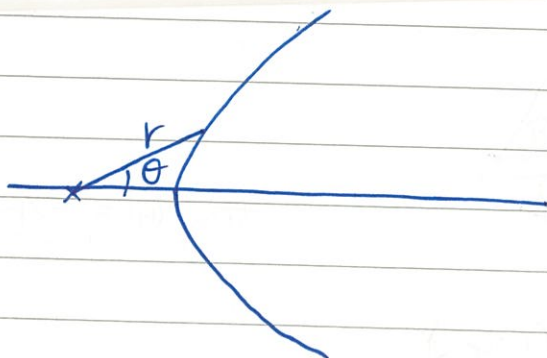
$$\cos \Theta = \frac{D/b}{\sqrt{1 + (D/b)^2}} \quad \text{其中 } D = K/T_0' \dots (42)$$

$$\therefore \frac{K}{2D} = T_0'$$

所以 $2D$ 為假想粒子 ($b=0$) 頭對頭, 碰撞時能達到之最短距離值



(42) 式也可直接由 Kepler's 問題之解得到:



此時 $U(r) = \frac{-K}{r}$ 而非 $\frac{-K}{r^2}$, 故要將 $K \rightarrow -K$

雙曲線之方程式為

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{uK}{\ell^2}, \quad \frac{1}{r} = u = A \cos \theta + \frac{uK}{\ell^2}$$

$$\frac{\alpha}{r} = -1 + \epsilon \cos \theta \quad (\text{見 p. 6-16 (4) 式之 } \pm \text{ 式})$$

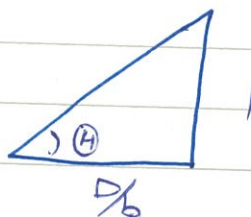
$$\alpha = \frac{\ell^2}{uK}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2T_0'^2 \ell^2}{uK^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2T_0' b}{K}\right)^2} > 1$$

$$r \rightarrow \infty \quad \text{時} \quad -1 + \epsilon \cos \theta = 0$$

$$\epsilon \cdot \cos \theta = \frac{1}{\epsilon} = \frac{D/b}{\sqrt{1 + (D/b)^2}} \quad \text{與 (42) 式一致}$$

由 (42) 式 可得:



$$\text{故} \quad \tan \theta = \frac{b}{D} = \cot \theta/2, \quad \cot \frac{\theta}{2} = \frac{b}{D} \quad \dots (43)$$

給出

(43) 式

$$(43) \text{ 式即: } b(\theta), \text{ 由此可得 } \frac{db}{d\theta} = -\frac{D}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta/2}$$

$$(\text{由 } b = D \cot \theta/2 \text{ 可得 } r_{\min} = D \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \theta/2}\right))$$

$$\text{故 } \angle(\theta) = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{D \cot \theta/2}{2 \sin \theta/2 \cos \theta/2} \cdot \frac{D/2}{\sin^2 \theta/2}$$

$$= \frac{D^2}{4} \frac{1}{\sin^4 \theta/2} = \left(\frac{k}{4T_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \quad \dots (43)$$

do B.P Rutherford scattering formula

注意: $\angle(\theta) \propto k^2$ 与 k 的符号没有关系

$$\text{當 } m_1 = m_2 \text{ 時, } T_0' = \frac{1}{2} u u_1^2 = \frac{1}{2} T_0$$

$\uparrow$
 $u = \frac{v}{2}$

$$\psi = \theta/2$$

$$\angle(\psi) = \angle(\theta=2\psi) \cdot 4 \cos \psi \quad \dots (44)$$

$$= \frac{k^2}{T_0^2} \frac{\cos \psi}{\sin^4 \psi}$$

$$\text{故 } \psi \rightarrow 0 \quad (\theta \rightarrow 0) \quad \angle(\theta) \sim \frac{1}{\theta^4} \quad \angle(\psi) \sim \frac{1}{\psi^4} \text{ 發散}$$

$\sim \left(\frac{2k}{mv^2} \right)^2 \frac{1}{\theta^4}$

$$\text{這使得總截面積 } \angle_t = 2\pi \int_0^\pi \angle(\theta) \sin \theta d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \angle(\psi) \sin \psi d\psi \text{ 發散 為 } \infty$$

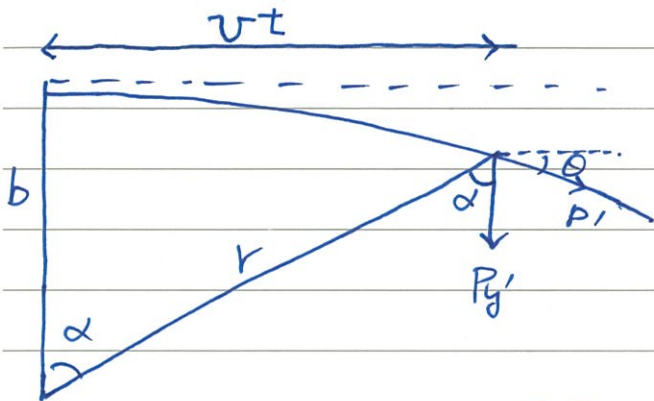
這是因為庫倫作用 $\frac{1}{r}$ 之長距作用之故, 不論 b 的大小如何, 皆會被散射之故!

Rutherford scattering formula 之另一個形式

是以入射之入射粒子之動量差表示:

小角度散射

小角度散射可由動量之改變的分析求得。



如圖

$$\sin \theta \approx \theta \approx \frac{p_y'}{p}$$

$$p_y' = \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(r) \cos \alpha dt$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{r}, \quad r \approx \sqrt{b^2 + v^2 t^2}$$

$$\therefore p_y' = \int_{-\infty}^{\infty} F(\sqrt{b^2 + v^2 t^2}) \frac{b}{\sqrt{b^2 + v^2 t^2}} dt \quad \dots (44) - 1$$

若 $F = \frac{K}{r^2}$, 則 $p_y' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Kb}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} dt$

$$\stackrel{x = vt}{=} \frac{2K}{bv} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{2K}{bv}$$

$$p' \approx p, \quad \therefore \theta \approx \frac{p_y'}{p} \approx \frac{2K}{mv^2 b}$$

$$\Delta(\theta) = \left| \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} \right| \sim \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{2K}{b} \right)^2$$

若 $F \propto \frac{1}{r^{\alpha+1}}$ ($\text{Ep } U \propto \frac{1}{r^\alpha}$)

$$\text{則 } \theta \sim \frac{p_y'}{p} \sim \frac{b}{mv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(b^2 + v^2 t^2)^{\frac{\alpha}{2} + 1}} dt$$

$$\sim \frac{1}{mv^2 b^\alpha} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2} + 1}}, \quad b \propto \theta^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$\alpha > 0$ 即45散

$$\therefore \Delta(\theta) \sim \frac{1}{\theta} \left| b \frac{db}{d\theta} \right| \sim \frac{1}{\theta} \frac{1}{\theta^{1/\alpha}} \frac{1}{\theta^{1/\alpha+1}} \sim \frac{1}{\theta^{2+1/\alpha}}$$

故 $\theta \rightarrow 0$, Δ 亦發散, 且 $\int d\theta \Delta = \infty$ for $\alpha > 0$

(44) -1 亦可以用 r 表示, $\frac{1}{2} v t = \sqrt{r^2 - b^2}$, 則 $\frac{dt}{r} = \frac{1}{v r} d\sqrt{r^2 - b^2}$

$$\text{故 } \theta = \frac{b}{mv^2} \int F(r) \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} = \frac{dr}{v \sqrt{r^2 - b^2}}$$

$$= \frac{zb}{mv^2} \int_b^\infty F(r) \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}}$$

$$= -\frac{b}{T} \int_b^\infty \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}}$$

由 (36) 式可知

$$(H) = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{b}{T} \int_b^\infty \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}}$$

$$\therefore \int_b^\infty \frac{b dr}{r \sqrt{r^2 - b^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore (H) = \int_b^\infty dr \left(\frac{b}{r \sqrt{r^2 - b^2}} - \frac{b}{T} \frac{dU}{dr} \frac{1}{\sqrt{r^2 - b^2}} \right)$$

$$= \int_b^\infty dr - \frac{d}{db} \left[\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}} - \frac{1}{T} \frac{dU}{dr} \sqrt{r^2 - b^2} \right] \quad \leftarrow \text{integration by part}$$

$$= -\frac{d}{db} \int_b^\infty dr \left[\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}} - \frac{U}{2T} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}}} \right]$$

與 (4) 比較可知小角度散射對應 U 之 -1 階項:

$$b \approx r_{\min} \quad \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}} - \frac{U}{2T} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}}} \approx \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}} - \frac{U}{T}$$

$$\textcircled{H} = -\frac{2}{b} \int_b^{\infty} dr \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{U}{T}}$$

$$= \int_b^{\infty} \frac{\frac{b}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{U}{T}}} \Rightarrow \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{b}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{U}{T}}}$$

例：光在重力場中之偏折

根據相對論 能量 E 具有 E/c^2 之質量

Einstein 1911 年 測光也具有慣性

質 E/c^2 ，故會受到重力作用而偏折。

此偏折造成遠方星球被觀測到位置偏移，如下圖所示：



$$\therefore OB = \sqrt{x^2 + R^2}$$

$$dt = \frac{dx}{c}$$

$$p_y = \int_{-\infty}^{\infty} F \cos \theta \frac{dx}{c}$$

$$F = \frac{GMm}{(R^2 + x^2)}, m = E/c^2$$

$$= \frac{GMm}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{3/2}} dx \quad \cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$= \frac{GMmR}{c} \left. \frac{x}{R^2 \sqrt{x^2 + R^2}} \right|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2GMm}{Rc}$$

$$\therefore \alpha \approx \frac{p_y}{p} = \frac{2GMm}{Rc mc} = \frac{2GM}{Rc^2}$$

$$p = mc$$

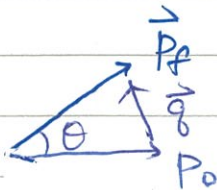
$$M \approx 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad R = 6.96 \times 10^8 \text{ m}, \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$$

$$\alpha \approx 0.875'' \quad (\text{廣義相對論}, \alpha = \frac{4GM}{Rc^2} = 1.75'')$$

expt. confirm it!

$\vec{p}_0$

x
Scattering center



$$\therefore p_f = p_0 = mu_1$$

$$\text{故 } q = 2p_0 \sin \theta/2$$

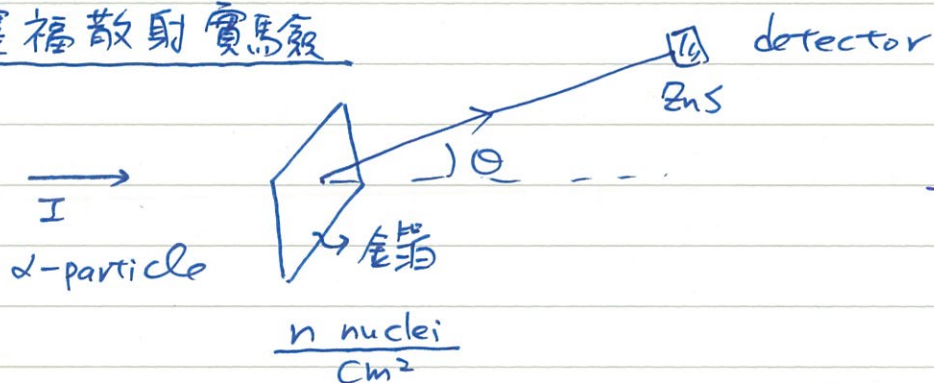
$$q^2 = 4p_0^2 \sin^2 \theta/2 = 4\mu^2 u_1^2 \sin^2 \theta/2$$

$$\text{故 } \langle I(\theta) \rangle = \left(\frac{K}{4T_0'} \right)^2 \left(\frac{8\mu T_0'}{q^2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{2\mu K}{q^2} \right)^2$$

... (45) (Feynman diagram)

拉塞福散射實驗



$$D^2 \frac{1}{V} \propto f(V)$$

$$V \propto \frac{1}{q^2}$$

歷史上，拉塞福散射實驗主要在說明^{正確}原子模型
為^{正確}原子核中而原子核非常時小，大部份之
正電荷集中於

原子空間由電子也佔據。因此，Thomson's 模型
(正電荷均勻分佈在一球內，而電子像葡萄乾
塞於其中) 並不正確。

實驗的方法是讓 α -particle 射入金箔，^測散射情形而定。

如果是 Thomson's 模型， α 粒子完全反彈之機會很小，絕大部份是向前散射。然而在 1911 年拉塞福卻發現 α 粒子有很大之機會反彈，

Thomson 模型不合。拉塞福進一步發現必須將正電荷集中在我們現在所稱的原子核

才能解釋實驗。之後 Geiger 及 Marsden 作

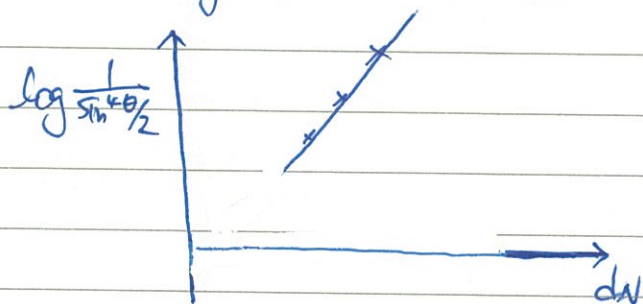
了仔細的研究推論出原子核半徑約 10^{-14}m 左右：

(i) 首先之所以取金箔是使得多重散射不用被考慮。

(43)-(44) 必須再乘以 n 才是最後被散射的粒子數
為單靶粒子之結果

即
$$dN = I n \Delta(\theta) d\Omega \quad \dots (46)$$

(ii) Geiger, B Marsden 以 $\log \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$ 與 dN 作圖



發現 (43) 式在 $5^\circ - 110^\circ$ 符合的很好

且 $\Delta(dN) \propto \frac{1}{T^{1/2}}$ 也成立

(iii) 當 θ 太大， $2D$ 太小時， dN 開始

偏离 (43) 式，開始偏离之 $2D \sim 10^{-14}\text{cm}$

即為原子核之半徑！

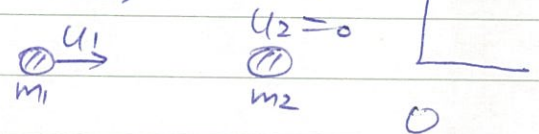
相對論碰撞

以相對論處理碰撞問題時，並沒有
彈性與非彈性之分，所有的碰撞，其
動量及總能量皆守恒。(非相對論
處理的是質心的動能，才有彈性及非彈性
各質點之

之分)

因此，
$$\begin{cases} \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2', \text{ 即 } \frac{m_1 \vec{u}_1}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 \vec{u}_2}{\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 \vec{v}_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} \\ \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}} = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} \end{cases}$$

永遠成立。(In general, 質量不守恒, $m_1, m_2 \Rightarrow m_1', m_2'$)

對一維而言，在 LAB frame, 

$$\frac{m_1 u_1}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}} = \frac{m_1 v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}$$

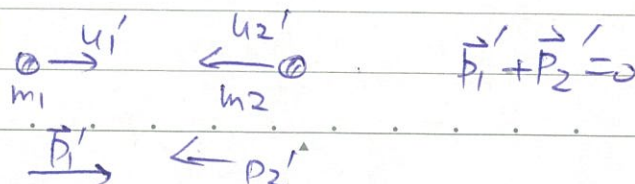
$$\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}} = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}$$

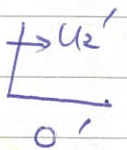
可以完全將 u_1 及 u_2 解出。

除了硬解 u_1 及 u_2 之外，亦可先轉換

到動量中心座標 (center of momentum)

在 O' 中





$$\text{由 } P_1' = \gamma_2' (P_1 - \frac{U_2'}{c^2} E_1)$$

$$\text{及 } P_1 = m_1 U_1 \gamma_1 = m_1 c \beta_1 \gamma_1, \quad P_1' = m_1 U_1' \gamma_1' = m_1 c \beta_1' \gamma_1'$$

$$\beta \gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{可得 } \underbrace{m_1 c \sqrt{\gamma_1'^2 - 1}}_{P_1'} &= (m_1 c \beta_1 \gamma_1 - \beta_2' m_1 c \gamma_1) \gamma_2' \\ &= m_1 c (\gamma_2' \sqrt{\gamma_1^2 - 1} - \gamma_1 \sqrt{\gamma_2'^2 - 1}) \\ &= P_2' = m_2 c \beta_2' \gamma_2' \\ &= m_2 c \sqrt{\gamma_2'^2 - 1} \end{aligned}$$

如题可以求出 γ_2' 及 γ_1' :

$$\text{由 } \frac{m_1}{m_2} (\gamma_2' \sqrt{\gamma_1^2 - 1} - \gamma_1 \sqrt{\gamma_2'^2 - 1}) = \sqrt{\gamma_2'^2 - 1}$$

$$(\frac{m_1}{m_2} \gamma_2')^2 (\gamma_1^2 - 1) = (1 + \frac{m_1}{m_2} \gamma_1)^2 (\gamma_2'^2 - 1)$$

$$\gamma_2'^2 \left[\left(1 + \frac{m_1}{m_2} \gamma_1\right)^2 - \left(\frac{m_1}{m_2} \gamma_1\right)^2 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \right] = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \gamma_1\right)^2$$

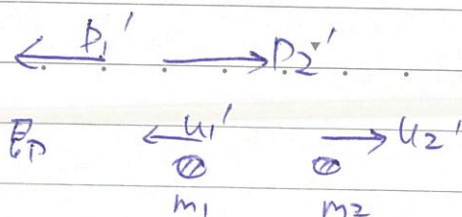
$$\therefore \gamma_2' = \frac{1 + \frac{m_1}{m_2} \gamma_1}{\sqrt{1 + 2\frac{m_1}{m_2} \gamma_1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2}} = \frac{\gamma_1 + \frac{m_2}{m_1}}{\sqrt{1 + 2\gamma_1 \frac{m_2}{m_1} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2}} \quad \text{--- (46)}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1'^2 - 1 &= \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 (\gamma_2'^2 - 1) = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \frac{(\gamma_1 + \frac{m_2}{m_1})^2 - 1 - 2\gamma_1 \frac{m_2}{m_1} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2}{1 + 2\gamma_1 \frac{m_2}{m_1} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2} \\ &= \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \frac{\gamma_1^2 - 1}{1 + 2\gamma_1 \frac{m_2}{m_1} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\gamma_1'^2 = \frac{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \gamma_1^2 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 + 1 + 2\gamma_1 \frac{m_2}{m_1} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2}{1 + 2\gamma_1 \frac{m_2}{m_1} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2}$$

$$\gamma_1' = \frac{\frac{m_2}{m_1} \gamma_1 + 1}{\sqrt{1 + 2\gamma_1 \frac{m_2}{m_1} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2}} = \frac{\gamma_1 + \frac{m_1}{m_2}}{\sqrt{1 + 2\gamma_1 \frac{m_1}{m_2} + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2}} \quad \text{--- (47)}$$

碰撞後



$$\therefore p_1^f = \gamma_2' (-m_1 c \beta_1' \gamma_1' + m_1 c \beta_2' \gamma_1')$$

$$\uparrow$$

$$p_1' + \frac{u_2'}{c^2} E_1'$$

$$= m_1 c [\gamma_1' \sqrt{\gamma_2'^2 - 1} - \gamma_2' \sqrt{\gamma_1'^2 - 1}] = \frac{m_1 v_1}{\sqrt{1 - (\frac{v_2}{c})^2}}$$

$$p_2^f = \gamma_2' (m_2 c \beta_2' \gamma_2' + m_2 c \beta_2' \gamma_2')$$

$$= 2 m_2 c \beta_2' \gamma_2'^2 = 2 m_2 c \gamma_2' \sqrt{\gamma_2'^2 - 1} = \frac{m_2 v_2}{\sqrt{1 - (\frac{v_2}{c})^2}}$$

利用 (46) 及 (47) 可得

$$\therefore p_1^f = \frac{m_1 c \sqrt{\gamma_1'^2 - 1} (\frac{m_1}{m_2} - \frac{m_2}{m_1})}{\sqrt{1 + 2 \gamma_1' \frac{m_1}{m_2} + (\frac{m_1}{m_2})^2} \sqrt{1 + 2 \gamma_1' \frac{m_2}{m_1} + (\frac{m_2}{m_1})^2}} \quad (48)$$

$$p_2^f = 2 m_2 c \frac{(\gamma_1' + \frac{m_2}{m_1}) \sqrt{\gamma_1'^2 - 1}}{\sqrt{1 + 2 \gamma_1' \frac{m_2}{m_1} + (\frac{m_2}{m_1})^2}} \quad (49)$$

Non-relativistic limit:

$$\sqrt{\gamma_1'^2 - 1} = \frac{u_1/c}{\sqrt{1 - (\frac{u_1}{c})^2}} \approx \frac{u_1}{c} \quad \gamma_1' \approx 1$$

$$\therefore p_1^f = m_1 \frac{u_1 \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_2 m_1}}{\sqrt{(1 + \frac{m_1}{m_2})^2} \sqrt{1 + (\frac{m_2}{m_1})^2}} = m_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1$$

$$\therefore v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1$$

$$p_2^f = 2m_2 c \frac{(1 + \frac{m_2}{m_1}) u_1/c}{(\frac{m_1+m_2}{m_1})^2}$$

$$= m_2 \frac{2m_1 u_1}{m_1 + m_2} \quad \therefore v_2 = \frac{2m_1 u_1}{m_1 + m_2}$$

與非相對論結果一致

例：在光滑水平面上，一質量 1.2 kg 之小球以 $0.8c$ 向東運動，另一質量為 1.6 kg 以 $0.6c$ 向西運動之小球發生正面碰撞後，合為一體。忽略可能之輻射損失，求碰撞後之質量以及速度。

由動量及能量守恆：

$$\left\{ \begin{aligned} & \gamma_1 m_1 v_1 + \gamma_2 m_2 v_2 = \gamma_f m_f v_f \\ & \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} 1.2 \times 0.8c + \frac{1}{\sqrt{1-0.6^2}} 1.6 \times (-0.6c) = \frac{m_f v_f}{\sqrt{1-(\frac{v_f}{c})^2}} \\ & 0.4c = \frac{m_f v_f}{\sqrt{1-(\frac{v_f}{c})^2}} \quad \text{--- (1)} \\ & \gamma_1 m_1 c^2 + \gamma_2 m_2 c^2 = \gamma_f m_f c^2 \\ & \frac{1.2c^2}{\sqrt{1-0.8^2}} + \frac{1.6c^2}{\sqrt{1-0.6^2}} = \frac{m_f c^2}{\sqrt{1-(\frac{v_f}{c})^2}} \Rightarrow 4 = \frac{m_f}{\sqrt{1-(\frac{v_f}{c})^2}} \quad \text{--- (2)} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow v_f = 0.1c, \quad \therefore m_f = 4 \sqrt{1-(0.1)^2} \approx 3.98 \text{ kg}$$

質量增加！ $\Delta m = 3.98 - 1.6 - 1.2 = 1.18$

注意: 古典物理 $1.2 \times 0.8c - 1.6 \times 0.6c = (1.2 + 1.6)v_c$

$$v_c = 0!$$

物件之總動能變化:

$$K_f = \gamma_f mc^2 - mc^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-0.1^2}} - 1 \right) \times 3.94c^2 = 0.0259c^2$$

$$\Delta K = K_f - K_i$$

$$= \gamma_f mc^2 - mc^2 - [(\gamma_1 m_1 c^2 - m_1 c^2) + (\gamma_2 m_2 c^2 - m_2 c^2)]$$

$$= -1.1819c^2 \quad \text{正好是 } \Delta mc^2!$$