

## 實驗 21 RC 與 RCL 線路

### 一、目的

研究 RC 電路中電荷的鬆弛 (charge relaxation) 現象，及 RCL 線路的電荷振盪現象。

### 二、原理

#### (一)RC 線路：

將電阻器  $R$ ，電容器  $C$  和電池  $\varepsilon_0$  連接成如圖 1 所示的線路。若電鍵接到 a 點，則由環路定理 (loop theorem) 可以得到方程式 (參考資料 1~4)：

$$\varepsilon_0 = iR + \frac{q}{C} \quad (1)$$

因為  $i = dq/dt$ ，所以：

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon_0$$

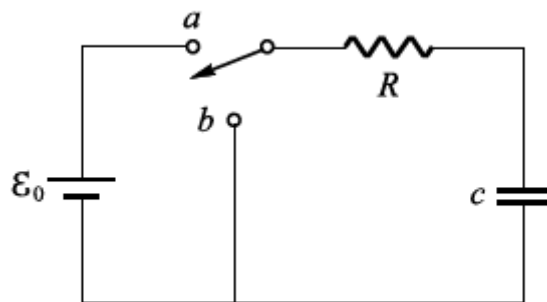


圖 1 RC 線路圖。

解之得：

$$q(t) = C\varepsilon_0(1 - e^{-t/RC}) \quad (2)$$

(2)式假設電鍵接上 a 點的剎那為  $t=0$ ，這時電容器上的電量為零，電容器電極板上的電量對時間的關係如圖 2 所示，這是典型的電容器充電現象。當  $t \rightarrow \infty$ ，也就是，電鍵接於 a 點相當久之後，電容器上的電量會趨近於飽和值  $q_{max} (= C\varepsilon_0)$ 。

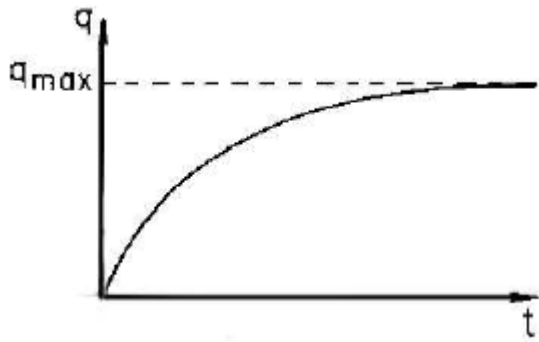


圖 2 電容器充電時電荷對(充電)時間的關係圖。

電容器上的電量充至  $q_{max}$  後，如果將電鍵改接於 b 點，則電容器開始放電。依照環路定理得方程式：

$$iR + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \quad (3)$$

現在，令  $t=0$  時， $q = q_{max}$ ，則上式的解為：

$$q(t) = q_{max} e^{-t/RC} \quad (4)$$

當時間  $t=RC$  時，電量降為原來的  $1/e$ ，一般稱此  $RC$  乘積為這個線路的鬆弛時間 (relaxation time) 或時間常數 (time constant)  $\tau_0$ 。這個時間常數也等於(2)式 (圖 2) 中  $q$  上升到  $q_{max}$  的  $(1 - e^{-1}) \times 100\% = 63.2\%$  所需的時間。如圖 3 所示， $q$  從  $q_{max}$  降至一半所需時間  $T_{1/2}$  稱為“半衰期 (half-life)”。 $T_{1/2}$  與時間常數  $RC$  的關係式為：

$$T_{1/2} = RC \ln 2 \quad (5)$$

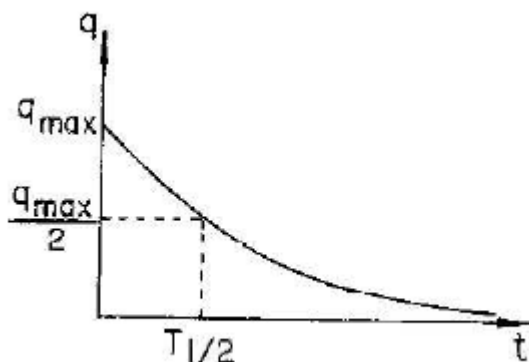


圖 3 電容器放電時電荷對 (放電) 時間的關係圖。

本實驗利用訊號產生器的方波代替電鍵裝置，線路如圖 4 所示。方波的前半週期正如前述充電的情形，相當於在 a、b 點接上一個固定的電動勢；而後半週期則為放電的情況。

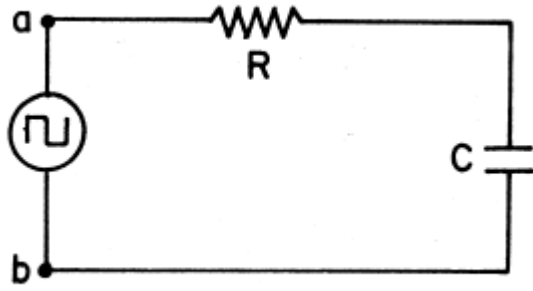


圖 4 RC 線路的充放電實驗：以訊號產生器的方波代替直流電源及電鍵裝置。

當方波週期的一半  $T/2 > RC$  時，電容器充放電情形會如圖 2 和圖 3 的圖形依序重複出現，如圖 5 所示。當方波的半週期  $T/2 < RC$  時，電容器上的電量尚未到達  $q_{max}$  值就開始放電，而且尚未完全放完電便又開始充電，所得  $q$  與  $t$  的關係如圖 6 所示。

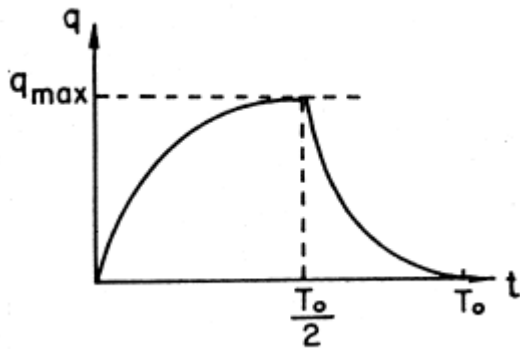


圖 5 依圖 4 之裝置做 RC 線路的充放電實驗，當方波週期的一半， $T/2 > RC$  時，電容器上的電量對時間的關係圖。

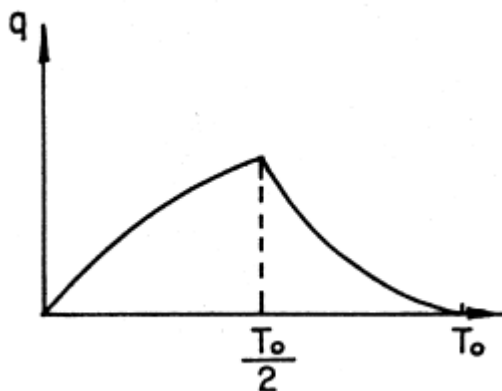


圖 6 依圖 4 之裝置做 RC 線路的充放電實驗，當方波週期的一半， $T/2 < RC$  時，電容器上的電荷對時間的關係圖。

通常訊號產生器輸出的方波電壓在正負兩個值之間變換，也就是，若波形高度為  $\varepsilon_0$ ，則前半週期的電壓為  $\varepsilon_0/2$ ，後半週期的電壓為  $-\varepsilon_0/2$ 。讀者可以自行模仿前面的方法求出線路方程式的解，所得到的半衰期  $T_{1/2}$  與時間常數  $\tau_0$  應和前面所得的一樣。事實上，不論方波的電壓如何平移，波形總是一樣。

## (二) LC 線路和電荷的阻尼振盪 (damped oscillation) :

如圖 7 的電路，電感器和充了電的電容器串聯時，依環路定理可得 (參考資料 1~4) :

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (6)$$

因為  $i = dq/dt$ ，故：

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \quad (7)$$

解之得：

$$q(t) = q_{max} \cos(\omega_0 t - \delta) \quad (8)$$

這裡必  $\omega_0^2 \equiv 1/LC$ ； $q_{max}$  和  $\delta$  為由起始條件所決定的常數。

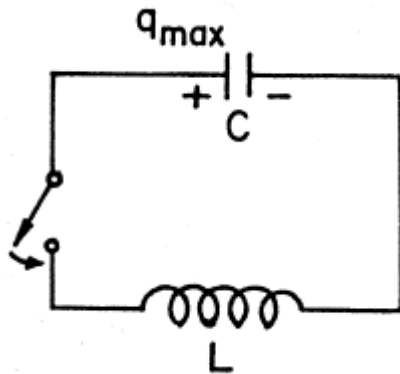


圖 7 LC 線路。

像(8)式這種單頻率的諧振函數，數學形式和力學中簡諧運動的解完全一樣。電荷在 RCL 線路中的振盪現象和力學中質點的振盪現象(實驗 9)是可以完全對應比照的。其對應的關係是： $q \leftrightarrow x$ ， $i \leftrightarrow v$ ， $1/C \leftrightarrow k$ ， $L \leftrightarrow m$ ， $R \leftrightarrow \lambda$  及  $\varepsilon \leftrightarrow F$ ，其中  $x$ ， $v$ ， $m$  依次為振動質點的位移、速度、及質量， $k$  為彈簧彈性係數， $\lambda$  為阻尼係數， $F$  為質點所受的外力。

任何線路都有電阻，即使不特意加上外電阻，線路也有內電阻存在 (如導線，線圈的電阻，電源或訊號產生器等均有內電阻)。如果我們以  $R$  代表線路上的總電阻值，則線路方程式(6)式，應改寫為(參考圖 8)：

$$L \frac{di}{dt} + iR + \frac{q}{C} = 0 \quad (9)$$

定義  $\beta \equiv \frac{R}{2L}$ ， $\omega_0^2 \equiv 1/LC$ ，將上式整理為  $q$  的微分方程式：

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \quad (10)$$

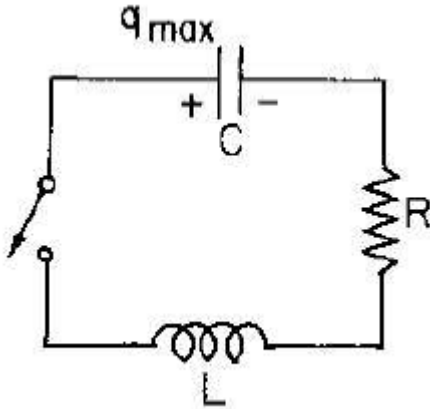


圖 8 RCL 線路。

由此式所解得的  $q(t)$  形式，可以分成三種狀況，以下逐一來討論：

$\beta^2 < \omega_0^2$ ， $\beta^2 = \omega_0^2$ ， $\beta^2 > \omega_0^2$ 。

1.  $\beta^2 < \omega_0^2$ ，稱為次阻尼振盪 (underdamping oscillation)：

這時，電量與時間的關係可以寫為：

$$q(t) = [q_0 e^{-\beta t}] \cos(\omega_1 t - \delta) \quad (11)$$

式中  $q_0$  和  $\delta$  值由起始條件決定，其中  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ ， $\omega_1$  稱為阻尼振盪頻率。嚴格地說， $\omega_1$  不是頻率，因為第二次振盪的最高電荷量總是比第一次來得小些，所以  $q(t)$  並不是做真正的週期性振盪運動。若選擇時間原點使  $\delta = 0$ ，則  $q$  與  $t$  的關係如圖 9 所示。當然，如果  $\beta$  值很小，則  $\omega_1 \approx \omega_0$ ，電荷的振盪便可以看做是振幅逐漸衰減的簡諧運動，而其頻率比簡諧振盪的頻率  $\omega_0$  稍微小一些。

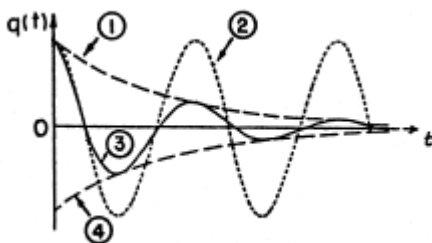


圖 9 RCL 線路作次阻尼振盪時，電容器上電量對時間的關係圖： $\textcircled{1} q_0 e^{-\beta t}$ ， $\textcircled{2} \beta = 0$ ， $\textcircled{3} \beta = 0.2\omega_0$ ， $\textcircled{4} -q_0 e^{-\beta t}$

在這種振盪中，振幅 ( $= q_0 e^{-\beta t}$ )，隨時間之增加而減小，所以電荷振盪的包跡 (envelope) 與時間之關係為：

$$q_{max}(t) = \pm q_0 e^{-\beta t}$$

當  $t = 1/\beta$  或  $2L/R$  時，振盪的包跡降為起始的  $1/e$  倍，這段時間稱為該線路的时间常數  $\tau_0$ ；又當  $t = (\ln 2)/\beta$ ，即  $t = \tau_0 \ln 2$  時，振幅降為原先的一半，這段時間稱為半衰期  $T_{1/2}$ 。

實驗上，可以利用示波器量出  $T_{1/2}$ ，然後推算出線路的  $\beta$  值。

2.  $\beta^2 = \omega_0^2$ ，稱為臨界阻尼振盪 (critical damping oscillation)。
3.  $\beta^2 > \omega_0^2$ ，稱為過阻尼振盪 (overdamping oscillation)。

在後兩種情況，電容器上的電荷不再有振盪現象，而是漸漸地減少而趨近於零，如圖 10 所示。臨界阻尼時，振幅趨近於零所需的時間較短，因此，一般電學儀表大都設計成臨界阻尼狀況，以縮短反應所需的時間。

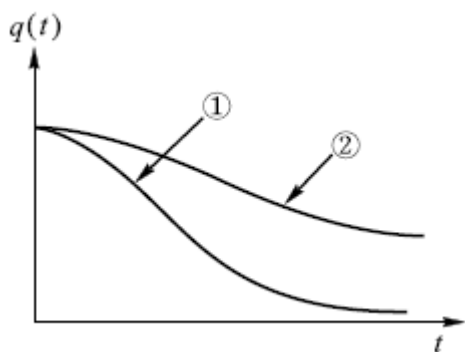


圖 10 RCL 線路的阻尼過大則線路上電荷不再有振盪現象：①臨界阻尼  $\beta^2 = \omega_0^2$ ，②過阻尼。  $\beta^2 > \omega_0^2$ 。

### (三) RCL 線路的電荷振盪：

現在，我們考慮 RCL 串聯電池的情形，如圖 11(a) 所示。當電鍵接通 x 點時，由環路定理得 (參考資料 1~4)：

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + iR = \varepsilon_0 \quad (12)$$

利用前述的符號  $\beta$  及  $\omega_0$ ，且定義  $\alpha \equiv \varepsilon_0/L$ ，將上式整理後可得：

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \alpha \quad (13)$$

在  $\beta^2 < \omega_0^2$  (次阻尼振盪) 的條件下，可以解出電量與時間的關係為：

$$q(t) = \frac{\alpha}{\omega_0^2} [1 - A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta)] \quad (14)$$

式中的 A 及  $\delta$  值可以由起始條件決定。如果選擇時間原點使  $\delta = 0$ ，則由  $q(0) = 0$  知  $A =$

1；這種情況的電量與時間的關係如圖 12 所示。

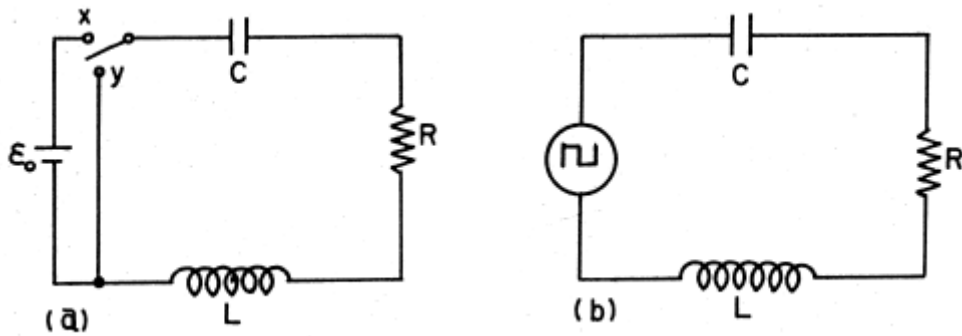


圖 11 RCL 線路振盪的實驗裝置圖。

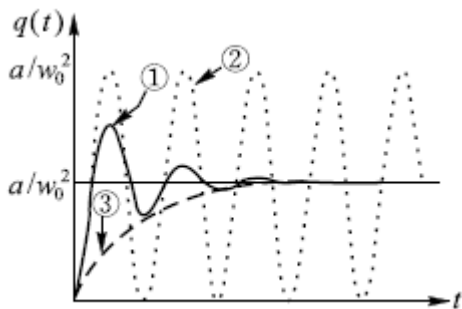


圖 12 RCL 線路振盪時，電荷對時間的關係圖與阻尼大小 $\beta$ 有關： $\textcircled{1} \beta = 0.2\omega_0$ ， $\textcircled{2} \beta = 0$ ， $\textcircled{3} \beta = \omega_0$ ， $q(t) = \frac{a}{\omega_0^2} (1 - e^{-\beta t})$ 。

如果在圖 11(a)的線路中，先串聯電池直到電容器充電至 $q = q_{max}$ 後，再將電鍵轉接於 y 的電荷振盪過程，也可以利用訊號產生器的方波來取代[見圖 11 (b)]。方波的前半週期相當於電容器充電，後半週期相當於電容器放電的情形。

(四) RCL 線路的正弦波強迫振盪：

如圖 13，將訊號產生器輸出的正弦波與 RCL 串聯，依環路定理可得(參考資料 1、3、4)：

$$L \frac{di}{dt} + iR + \frac{q}{C} = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

將前面定義的 $\beta$ ， $a$  及 $\omega_0$ 代入上式，整理之後可寫成：

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = a \cos \omega t \quad (15)$$

在線路接好經相當長一段時間之後，電量已呈穩定狀況，此時(15)式的解為：

$$q(t) = q_A \cos(\omega t - \delta) \quad (16)$$

這裡 $\delta$ 及 $q_A$ 的值分別為：

$$\delta = \tan^{-1} \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$q_A = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (17)$$

$q(t)$ 也是一個簡諧振盪，其振盪頻率和驅動正弦波的頻率相同。由(17)式可知，電荷的振幅跟驅動電壓源的頻率 $\omega$ 有關；電荷與電壓之間的相位差 $\delta$ 也跟驅動電壓源頻率有關(圖 14)。

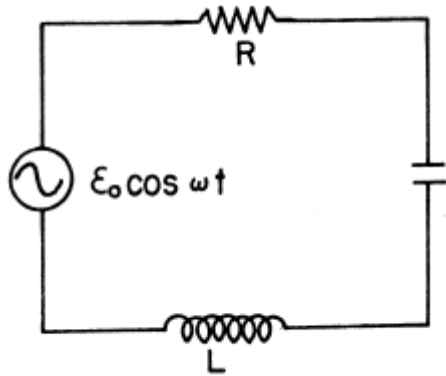


圖 13 正弦波驅動之 RCL 線路。

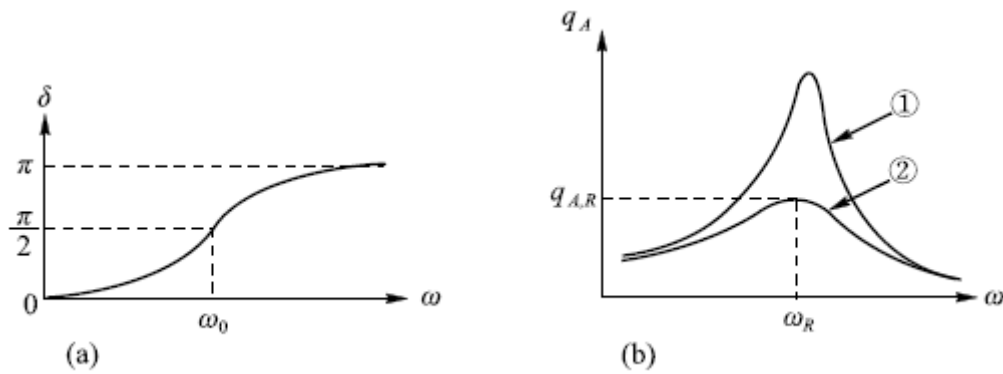


圖 14 強迫振盪的相角與振幅跟驅動電壓源頻率的關係圖：

(a) 相位；(b) 振幅：① $\beta$ 小 ② $\beta$ 大。

當 $\omega$ 從零漸增時，相位差亦由零開始增加，到 $\omega = \omega_0$ 時， $\delta = \pi/2$ ；如果 $\omega$ 繼續增加至無窮大， $\delta$ 會增加到 $\pi$ 。在 $\omega$ 接近自然頻率 $\omega_0$ 時，振幅 $q_A$ 達到最大值，這個頻率稱為共振頻率 $\omega_R$ 。共振頻率可由 $(dq_A/d\omega)|_{\omega=\omega_R} = 0$ 求得，即 $\omega_R = (\omega_0^2 - 2\beta^2)^{1/2}$ 。如果 $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ，則 $\omega_R \approx \omega_0$ 。由(17)式，可得在共振頻率時的振幅為：

$$q_{A,R} = \frac{a}{2\omega_0\beta} \quad (18)$$



由(18)式可知： $\beta$ 愈小，振幅的極大值愈大； $\beta$ 趨近於零時， $q_{A,R}$ 越接近於無限大。

通常在描述一個線路受阻尼的程度時，常使用參數“ $Q$ ”，來表示， $Q$ 稱為“ $Q$ 值 ( $Q$  value)”或“品質因數 (quality factor)”，其定義為：

$$Q \equiv \frac{\omega_R}{2\beta} \quad (19a)$$

當 $\beta^2 \approx \omega_0^2$ 時， $Q$ 值很小；而 $\beta^2 \ll \omega_0^2$ 時， $\omega_R^2 \approx \omega_0^2$ ， $Q$ 值變大。

振盪線路對頻率選擇的靈敏度常以頻寬 (band-width) 來表示。假設 $\omega_+$ 及 $\omega_-$ 分別為振幅 $q_A$ 由 $q_{A,R}$ 向兩側降至 $q_{A,R}/\sqrt{2}$ 時的頻率，而 $\omega_- < \omega_R < \omega_+$ ，則 $\omega_+$ 與 $\omega_-$ 之差 $\Delta\omega$ 就稱為此 RCL 電路的頻寬，如圖 15 所示。由(17)及(18)式可得：

$$\sqrt{2} \cdot 2\omega_0\beta = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\pm}^2)^2 + 4\omega_{\pm}^2\beta^2}$$

故

$$8\omega_0^2\beta^2 = (\omega_0^2 - \omega_{\pm}^2)^2 + 4\omega_{\pm}^2\beta^2 \quad (20)$$

若 $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ，則 $\omega_{\pm} = \omega_0$ ，由(20)式得：

$$(\omega_0^2 - \omega_{\pm}^2)^2 = 4\omega_0^2\beta^2$$

解之，得

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \omega_0 \left(1 \pm \frac{2\beta}{\omega_0}\right)^{1/2} \approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{\beta}{\omega_0}\right) \\ \therefore \Delta\omega &= \omega_+ - \omega_- \approx 2\beta \end{aligned}$$

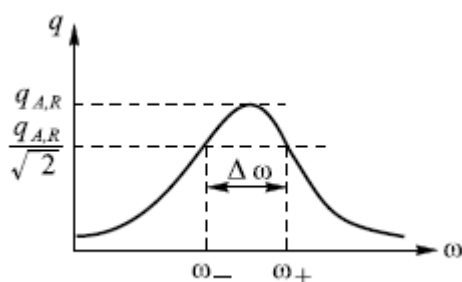


圖 15 正弦波驅動的 RCL 線路中，電荷振盪的最大振幅對正弦波頻率的關係圖。

因此， $Q$ 值與頻寬的關係式為：

$$Q \approx \frac{\omega_R}{\Delta\omega} \quad (19b)$$

$Q$ 值大時，振盪線路對正弦波(強迫振盪源)頻率的選擇很靈敏，也就是線路的共振頻率範圍( $\Delta\omega$ )很窄。在廣播電台很多，彼此的頻率相當靠近的地區，收音機就須採用 $Q$ 值較

大的諧振電路。否則在收聽某台廣播時，會同時收到頻率相近的電台之訊號，當兩種(或更多種)訊號同時出現時，人們會因聲音互相干擾而無法聆聽。

電容器上的電量與電壓的關係為 $q_c = CV_c$ 。因電容值 $C$ 是常數，所以本實驗中有關電量的變化，均可利用示波器觀察電壓的變化來推知。

### 三、儀器

示波器，訊號產生器，電阻器，可變電阻器(0~25k $\Omega$ )，電容器，電感器，三用電表，自備方格紙。

### 四、步驟

(一)用示波器觀察電容器的充電及放電現象：

1. 將電阻器( $R = 10\text{k}\Omega$ )，電容器( $C = 0.1\mu\text{F}$ )與訊號產生器及示波器連接如圖 16 所示，使訊號產生器的輸出為方波，改變其週期 $T$ ，觀察：(1)  $T \approx 100RC$ ，(2)  $T \approx 10RC$  及(3)  $T \approx RC$  三種情況下，示波器上所顯示的圖形。

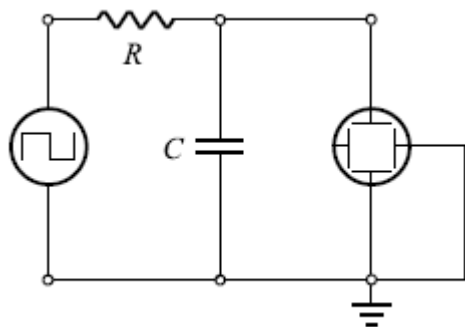


圖 16 利用示波器觀察 RC 線路的充放電現象之實驗裝置圖。

2. 在上述三個不同週期方波的情況下，正確地畫出方波電壓及電容器兩端電壓的圖形，仔細測量 $T_{1/2}$ 的大小。由(5)式算出 $\tau_0$ 值( $\tau_0 = T_{1/2}/\ln 2$ )，並與 $RC$ 乘積作比較。注意：(1)此處的 $R$ 值包括外加電阻及儀器的內電阻；(2)測電阻時，必須先將電源關掉，等線路中沒有電流後，再將零件從線路中拆下，才可以測量該零件的電阻值；(3)儀器的內電阻最好查使用手冊，切勿以三用電表直接測量，以免有燒毀電表的可能，而且量得的數值並不一定準確。
- \* 3. 將 $R$ 與 $C$ 的位置對調，觀察電阻器 $R$ 兩端之電位差並畫出其圖形；測量 $T_{1/2}$ 。
- \* 4. 改變電容或電阻之大小，分別觀察 $R$ 與 $C$ 對 $T_{1/2}$ 的影響。

(二)用示波器觀察阻尼振盪：

1. 將0~25k $\Omega$ 可變電阻器，0.001 $\mu\text{F}$ 電容器，10~25 mH電感器、訊號產生器(方波)與示波器接成如圖 17 所示的電路。首先將可變電阻器之電阻調為最小，變

化方波的週期  $T$ ，畫出：(1)  $T \approx 100 \cdot (2L/R)$ ，(2)  $T \approx 10 \cdot (2L/R)$  及 (3)  $T \approx 2L/R$  三種情況的阻尼振盪圖形。

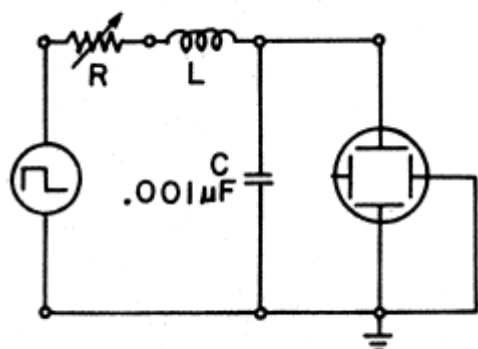


圖 17 利用示波器觀察 RCL 線路的振盪現象之實驗裝置圖。

2 · 仍然將可變電阻器的電阻調至最小，適當選擇兩種不同方波週期  $T$ ：

(1) 測量振盪振幅包跡降到起始值  $1/2$  的時間  $T_{1/2}$ ，計算時間常數，並與  $2L/R$  值作比較。

(2) 測量振盪頻率  $\omega_1 (= 2\pi\nu_1 = 2\pi/T_1)$ ，由  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - (R^2/4L^2)$  求出  $\omega_0$ ，並將其與  $1/\sqrt{LC}$  作比較。

\* 3 · 改變可變電阻的值，但仍然在次阻尼振盪的情況，重覆步驟 2。

4 · 改變可變電阻大小，觀察振盪波形，找出臨界阻尼振盪，測量此時線路之總電阻  $R_c$ ，並且與由  $\omega_0 = R_c/2L$  所預測的  $R_c$  值比較。

(三) 以示波器觀察共振現象，並測量線路的諧振頻寬和  $Q$  值：

1 · 把圖 17 線路中的訊號產生器輸出訊號改為正弦波，如圖 18 所示，將可變電阻器的電阻調至最小，改變正弦波週期，由最小慢慢增大。記下示波器上顯示的振幅<sup>†1</sup>為最大時正弦波之頻率  $\nu_R$ ；重複實驗並用方格紙畫出在  $\omega_R (= 2\pi\nu_R)$  附近 (至少  $0.5\omega_R \sim 2\omega_R$ ) 的振幅大小與  $\omega$  的關係圖，此圖應與圖 15 相似。

2 · 由圖上求得頻寬  $\Delta\omega$  並和預測值  $2\beta$  作比較。

3 · 將實驗所得的  $\omega_R$  及  $\Delta\omega$  值代入 (19b) 式，求出此線路的  $Q$  值。

4 · 改變可變電阻器的電阻大小，在  $\beta^2 < \omega_0^2$  的範圍內，重複步驟 1~3，求出振幅跟正弦波頻率的關係，並且比較振幅包跡的圖形。

†1 注意：改變正弦波頻率時，可能會使訊號電壓大小發生變化，所以必須隨時注意調節使輸出訊號的電壓為固定值。

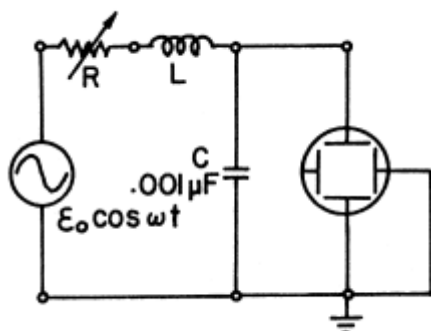


圖 18 觀察正弦波驅動 RCL 線路的振盪現象之實驗裝置圖。

## 五、問題

- 1 · 試證：RC 乘積的單位為“時間”的單位。
- 2 · 在實驗步驟(一)中，若  $T \leq RC$ ，如何測量  $T_{1/2}$ ?
- 3 · 試證：在只有 R 及 L 而沒有 C 的線路上，其鬆弛時間為  $L/R$ ，而且  $L/R$  的單位是時間。
- 4 · 在圖 7 的線路中，證明當電容器上的電量為極大值時，線路上的電流為零。
- 5 · 若將圖 17 的裝置中的 C 拆去，示波器上會顯示何種圖形？請詳細解釋原因(提示：參考示波器的輸入電路結構)。
- 6 · 試利用(17)式，由  $dq_A/d\omega |_{\omega=\omega_R} = 0$ ，證明  $\omega_R = (\omega_0^2 - 2\beta^2)^{1/2}$ 。

## 六、參考資料

- 1 · D. Halliday & R. Resnick : Fundamentals of Physics, 6th ed., ext. version ( John Wiley & Sons Inc., New York, 20011 ) , § 28-8, p. 648 ; § 31-1~§ 31-10, p. 711~p. 731 ; § 33-1~§ 33-9, p. 769~p . 789.
- 2 · 謝芳生譯：基本電路理論(一)(東華書局、民國六十年)。
- 3 · M. Alonso & E. J. Finn: Fundamental University Physics, 2nd ed., vol. II (Addison Wesley Pub. Co., 1980), chap. 9, p. 259.
- 4 · J. B. Marion: Classical Dynamics of Particles and Systems, 2nd ed. (Academic Press, New York, 1970), § 3-5, p. 101; chap. 4, p. 117.
- 5 · H. Benson: University Physics, revised ed. (John Wiley & Sons Inc., New York, 1995) , § 28-4, p. 559; § 32-1~§ 32-5, p. 653~p. 662.