

RC 電路

一、目的：

熟悉 RC 電路的充放電現象以及對正弦電壓的反應。

二、原理：

(一) RC 電路的充放電現象：

假設圖 1 中，RC 串聯電路的輸入電壓 $v_i(t)$ 為

$$v_i(t) = \begin{cases} V_1 & t < 0 \\ V_2 & t > 0 \end{cases} \quad V_1 \neq V_2$$

由 KVI (Kirchhoff's Voltage Law) 定律，圖 1 的電路滿足下式：

$$v_i(t) = v_R(t) + v_C(t) \quad (1)$$

迴路電流 $i(t)$ 的方向如圖 1 所示，如果在 $t > 0$ 時，(1) 式可以改寫成如下的式子。

$$V_2 = Ri(t) + v_C(t) \quad t > 0 \quad (2)$$

由於迴路電流 $i(t)$ 與電容器電壓 $v_C(t)$ 的關係為

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

因此可以得到下面的微分方程式

$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C t = V_2 \quad t > 0 \quad (3)$$

假設在 $t < 0$ 時電路已達穩定狀態，則在 $t = 0^+$ 時電容器電壓為， $v_C(0^+) = V_1$ ，解(3)式時將的 $v_C(0^+) = V_1$ 邊界條件代入，可得 $v_C(t)$ 的解為

$$v_C(t) = V_2 + (V_1 - V_2)e^{-t/\tau} \quad , \quad t > 0 \quad (4)$$

其中 $\tau = RC$

因為電容器上的電量 $q(t)$ 為 $q(t) = Cv_C(t)$ ，所以從(4)式可看出，當 $V_2 > V_1$ 時，電容器上的電量隨著時間的增加而增加，這就是電容的充電現象。圖 2(b) 所示為 $V_2 > V_1$ 時電容器電壓隨時間而變的情形，而電荷量的變化曲線也與圖 2(b) 相同，只是相差一個倍數 C 。如

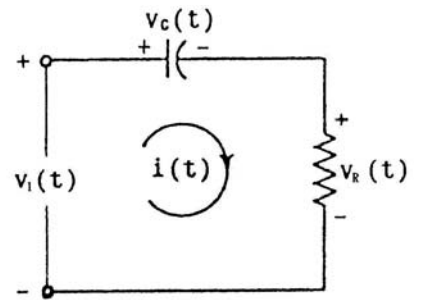


圖 1 RC 串聯電路

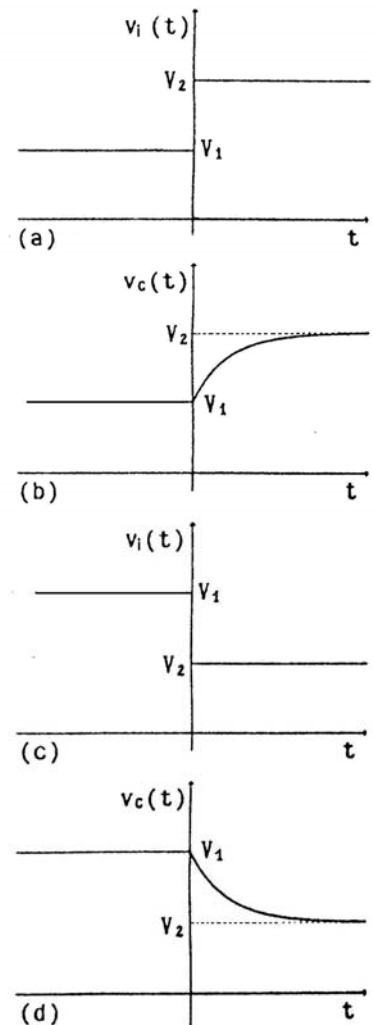


圖 2(a)(b) $V_2 > V_1$ 時，電容器充電的現象。

(c)(d) $V_1 > V_2$ 時，電容器放電的現象。

果 $V_2 < V_1$ ，則電容器上的電量隨著時間的增加而減少，這就是電容器的放電現象。圖 2(d)所示為 $V_2 < V_1$ 條件下，電容器電壓隨著時間而變的情形。

(4)式中的 $\tau = RC$ 稱為時間常數，這個數值決定了電容器上電量的變化率；時間常數 τ 較大者，電量變化較慢， $v_c(t)$ 要經過較長的時間才會達到穩定值；反之， τ 較小者，電量變化較快， $v_c(t)$ 較快達到穩定值。

如果將圖 1 的輸入電壓改為如圖 3(a)的波形

$$V_i(t) = \begin{cases} v_a & t < 0 \\ v_b & 0 < t < t_1 \\ v_a & t > t_1 \end{cases}$$

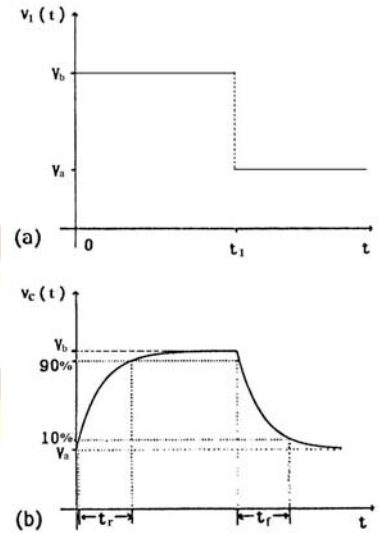


圖 3(a)輸入電壓 $v_i(t)$ 的波形

(b) $v_c(t)$ 的波形

則電容器上電壓 $v_c(t)$ 的變化情形如圖 3(b)所示。如果 $t_1 \gg \tau$ ，則 $v_c(t)$ 會在 $0 < t < t_1$ 的期間內趨於穩定值 V_b 。在這個情況下，在 $0 < t < t_1$ 的期間內，從 $v_c(t)$ 從 10% 上升到 90% 所需的時間稱為上升時間 t_r ；在 $t > t_1$ 時， $v_c(t)$ 從 90% 下降到 10% 所需的時間稱為下降時間 t_f ，如圖 3(b)所標示。

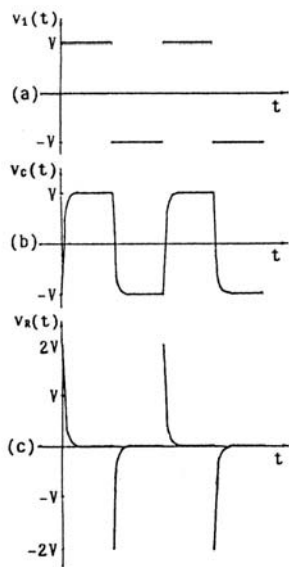


圖 4 $T/2 \gg \tau$ 時

- (a) $v_i(t)$
- (b) $v_c(t)$
- (c) $v_R(t)$

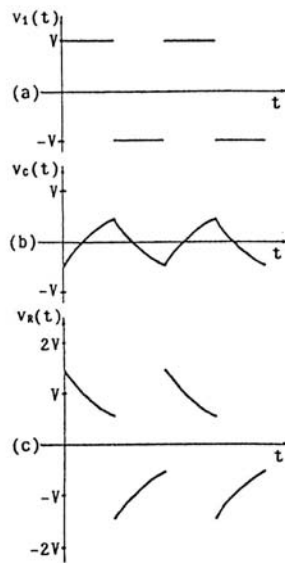


圖 5 $T/2 \approx \tau$ 時

- (a) $v_i(t)$
- (b) $v_c(t)$
- (c) $v_R(t)$

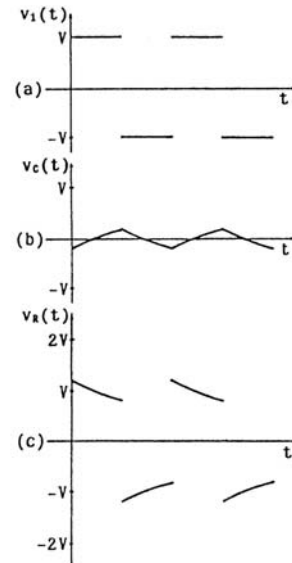


圖 6 $T/2 \ll \tau$ 時

- (a) $v_i(t)$
- (b) $v_c(t)$
- (c) $v_R(t)$

我們很容易可以證明， t_r 、 t_f 與 τ 有下列關係：

$$t_r = t_f = 2.2 \tau$$

可見 τ 值大的電路， t_r 和 t_f 也大，電路的反應較慢。

如果驅動電壓是週期性的方波(圖 4(a))，則電容器週期性地往高低兩個電壓充(放)電，其波型如圖 4(b)所示。因為 $v_i(t) = v_R(t) + v_C(t)$ ，所以 $v_R(t)$ (圖 4(c))與 $v_C(t)$ 互補。

如果 $T/2 \gg \tau$ ，電容器有足夠的時間充(放)電到穩定電壓，此時的 $v_C(t)$ 很接近方波，而 $v_R(t)$ 則趨近於窄脈波，如圖 4 所示。圖 5 是方波週期 $T/2 \approx \tau$ 時， $v_C(t)$ 與 $v_R(t)$ 的波形。如果 $T/2 \ll \tau$ ，電容器沒有足夠的時間充電或放電到穩定值，因此 $v_C(t)$ 的電壓波形很接近三角波，而與其互補的 v_R 波形反而很像方波波形，如圖 6 所示。

(二)對正弦電壓的反應:

如圖 7(a)所示，用正弦電壓驅動 RC 電路，因為 $Ri + v_C = V_m \cos \omega t$ ，電流和電容器上的電量都會隨時間做正弦函數變化。我們可以利用複數的形式去解電路，解完之後再對 i 和 v 分別取實數部份。電容器的組抗^{#1}為 $1/j\omega C$ ，整個電路的總阻抗為 $Z = R + 1/j\omega C$ ，所以迴路上的電流為

$$i(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{V_m e^{j\omega t}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \right]$$

$$= I_m \cos(\omega t + \phi) \quad (5)$$

其中相位角為

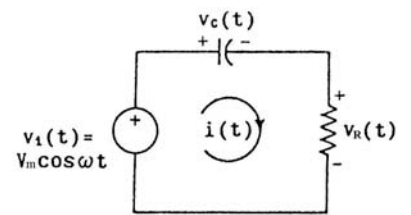
$$\phi = \tan^{-1} \frac{1}{\omega RC}$$

電流振幅 I_m 為

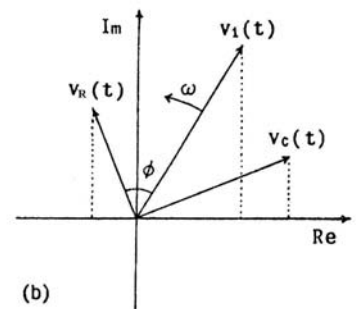
$$I_m = \frac{V_m / R}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC} \right)^2}}$$

圖 7(b)在複數平面上繪示 $v_i(t)$ 、 $v_R(t)$ 和 $v_C(t)$ 之間的關係。

#1 有關電容、電感的阻抗，請參考"交流電路與阻抗電橋"原理部份。為了與電流符號 i 有所區分，本書以 j 表示 $\sqrt{-1}$ 。



(a)



(b)

圖 7(a)正弦電壓

(b) $v_i(t)$ 、 $v_C(t)$ 及 $v_R(t)$ 之相位關係。

$v_i(t)$ 以 V_m 為半徑，以角頻率、循逆時針方向轉動，它在實數軸上的投影是 $V_m \cos \omega t$ 。 $v_R(t)$ 、 $v_C(t)$ 均與 $v_i(t)$ 以相同頻率循同一方向轉動，且 $v_C(t)$ 恆比 $v_R(t)$ 落後 90° 相位角。 $v_R(t)$ 比 $v_i(t)$ 則超前相位角 $\phi = \tan^{-1}(1/\omega RC)$ ，在實驗上所觀察的是 $v_R(t)$ 和 $v_C(t)$ 在實數軸上的投影。

振幅 I_m 並不因定，而是隨頻率而變的，它的最大值是 $I_{m,max} = V_m/R$ 。當正弦電壓的角頻率為電路的半功率角頻率 $\omega_{1/2}$ 時

$$\frac{I_{m,max}}{\sqrt{2}} = \frac{V_m/R}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_{1/2}RC}\right)^2}}$$

解出得 $\omega_{1/2} = \frac{1}{RC}$ 。我們可以將相位角 ϕ 和電流振幅 I_m 改寫為

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega_{1/2}}{\omega}$$

$$I_m = \frac{V_m/R}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{1/2}}{\omega}\right)^2}}$$

由於電阻器上兩端的電壓 $v_R(t)$ 為

$$\begin{aligned} v_R(t) &= Ri(t) \\ &= \frac{V_m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{1/2}}{\omega}\right)^2}} \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

所以電阻器電壓的峰值 V_{Rm} 為

$$V_{Rm} = \frac{V_m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{1/2}}{\omega}\right)^2}} \quad (6)$$

如果將 V_{Rm} 和 ϕ 分別對 ω 作圖，可以得到如圖 8 的曲線。由圖 8(a) 可以看出：當 ω 很小時，電容性電抗 (Capacitive reactance, 簡稱容抗) $1/j\omega C$ 很大，輸入電壓 $v_i(t)$ 大部份落在電容器上，所以電阻器上的電壓很小。反之，當 ω 很大時，容抗值 $1/j\omega C$ 很小，大部份輸入電壓落在電阻器上。由(6)式也可以看出：電路的電阻器上的電壓 $v_R(t)$

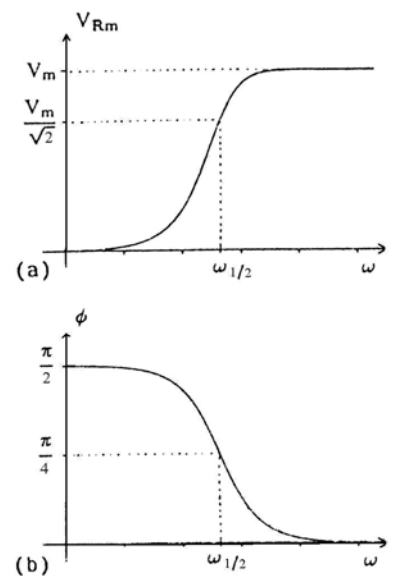


圖 8(a) $V_{Rm}-\omega$ 的曲線圖。

(b) $\phi-\omega$ 的曲線圖。

在頻率低時的峰值 V_{Rm} 較小；反之頻率高時， V_{Rm} 較大。因此，以圖 7 的電路來說，如果以電阻器的電壓做為輸出，這個電路就可做為一個在低頻時輸出電壓較小，在高頻時輸出電壓較大的「高通濾波器」。

電容器上的電壓 $v_c(t)$ 為

$$v_c(t) = \text{Re} \left[\frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{V_m e^{j\omega t}}{R + j\omega C} \right]$$

$$= \frac{V_m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{1/2}}\right)^2}} \cos(\omega t + \phi')$$

其中 $\phi' = \phi - \pi/2$ ；電容器電壓的峰值 V_{Cm} 為

$$V_{Cm} = \frac{V_m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{1/2}}\right)^2}} \quad (7)$$

如果將 V_{Cm} 和 ϕ' 分別對 ω 作圖，可以得到如圖 9 之曲線。由圖 9(a) 可看出：在頻率較低時電容器的電壓峰值 V_{Cm} 較大，反之頻率高時 V_{Cm} 較小。所以，如果以電容器的電壓做為輸出，則這個電路可做為一個「低通濾波器」。頻率從零到半功率頻率 $f_{1/2}$ 稱為此電路的頻寬 B.W.

$$\text{B. W.} = f_{1/2} = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{2.2}{2\pi t_r} = \frac{0.35}{t_r}$$

示波器的 B. W. 和 t_r 通常符合上到關係式。

(三) 示波器接線的補償：

我們實驗室中所使用的 CS-1022 示波器，其輸入阻抗為 $1\text{ M}/32\text{ pF}$ 。同軸電纜的電容為 128 pF ，因此使用示波器到試電路時，示波器含同軸電纜的總阻抗為 $1\text{ M}/160\text{ pF}$ 。示波器輸入阻抗隨著廠牌而有不同的值，不論其值為何，由前一單元。對正弦電壓的反應。的敘述可知，如果待測電路的頻率太高時，電容的容抗值會降得很低，造成待測電路很大的負載(參考電學基本量測的負載效應)，使得示波器上所顯示的電壓值與待測值有很大的差距。

為解決電容造成的負載效應，示波器的測試棒都會附有補償電路，如圖 10 所示。補償電路除了具有抵消

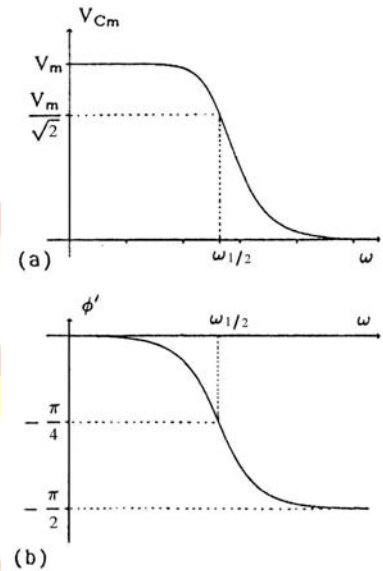


圖 9(a) $V_{Cm}-\omega$ 的曲線圖。

(b) $\phi'-\omega$ 的曲線圖。

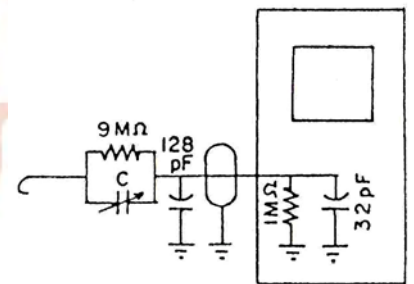


圖 10 示波器的輸入阻抗與 10:1 接線。

電容負載效應的功能外，還會將外界訊號表減為 1 / 10。

補償電路的原理如圖 11(a)所示，如果輸入電壓 $v_i(t)$ 為任意頻率的正弦波，則輸出電壓 $v_o(t)$ 為

$$v_o(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{\frac{R_i \frac{1}{j\omega C_i}}{R_i + \frac{1}{j\omega C_i}}}{\frac{R_i \frac{1}{j\omega C_i}}{R + \frac{1}{j\omega C_i}} + \frac{R_i \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}} V_m e^{j\omega t} \right] \quad (8)$$

我們發現：如果調整可變電容 C ，始得 $RC=R_iC_i$ ，則(8)式經化簡可得 $v_o(t)$ 為

$$v_o(t) = \frac{R_i}{R + R_i} v_i(t) \quad (9)$$

此表示：不論輸入電壓 $v_i(t)$ 之頻率如何改變，輸出電壓 $v_o(t)$ 不再與 C 及 C_i 有關，換句話說，在符合 $RC=R_iC_i$ 的條件下，圖 11(a)的電路可簡化成如圖 11(b)的等效電路。

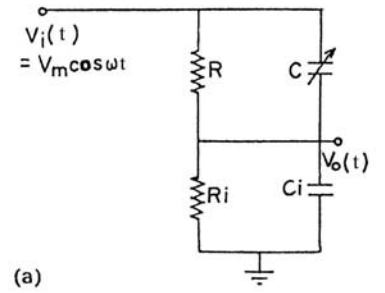
因為經過補償調整後的示波器不再有電容的負載效應，所以，不管待測電路的 $v_i(t)$ 是那種波形，示波器上所顯示的電壓 $v_o(t)$ 均為

$$v_o(t) = \frac{R_i}{R + R_i} v_i(t) \quad (10)$$

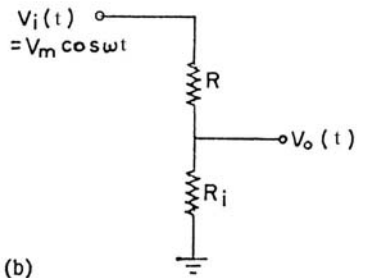
把上述的補償原理應用於 CS-1022 示波器中，將測試棒接至示波器本身產生的 1kHz 的方波，並把測試棒轉至 10:1 衰減，於調整探棒上的電容 C 時，我們可以看到示波器螢幕上的方波有如圖 12 的變化。當我們剛好把補償電容 C 調至 $C \approx 160/9 \text{ pF}$ ，示波器上就會呈現出完整漂亮的方形波，此時便是補償正確。

三、儀器與配件：

示波器，波形產生器(Function Generator)，直流電源供應器，DMM，100kΩ 電阻 2 個，1 kΩ 電阻 1 個，可變電阻 1 個，0.01 μF 及 1000 μF 電容各一個。馬表一個，小起子一支。



(a)



(b)

圖 11(a)示波器與補償電路的等效電路。R 與 C 為補償電路， R_i 和 C_i 為示波器及同軸電纜的輸入電阻與電容。
(b) $RC=R_i C_i$ 時的電效電路。

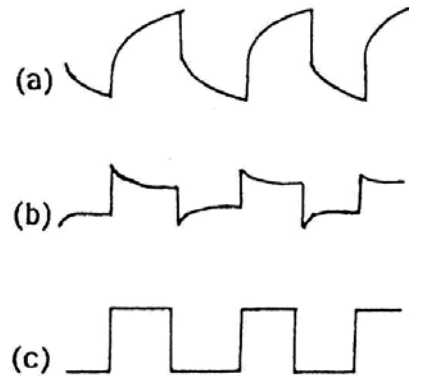


圖 12(a)欠補償， C 太小。

(b)過補償， C 太大。

(c)補償正確， $C \approx 160/9 \text{ pF}$ 。

四、步驟：

(一)觀察大電容器的充放電：

- 1.將 $1000\ \mu\text{F}$ 之電容器充分放電，然後接成如圖 13 之電路。
- 2.將開關撥至 a 點，從 DMM 上觀察電容器兩端電壓的變化情形，每隔半分鐘記錄一次。
- 3.當電容器的電壓達 3-5V 時，將開關接至 b 點。繼續記錄電容器上電壓的變化。
- 4.將電壓對時間在半對數紙上作圖，是否接近一直線？如何從這一條線推算電容器的電容值^{#2}？

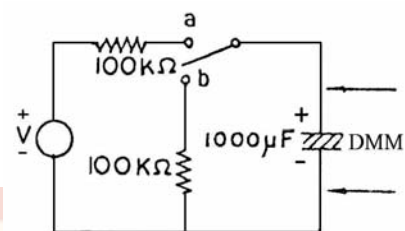


圖 13 電容器的充放電迴路。

#2 利用數位阻抗表可測量出較精確的

電容值，但要記住先把電容器兩腳之間短路，使它充分放電，以免殘餘電壓破壞阻抗表。

(二)補償電路：

- 1.如圖 14 之電路，用任意頻率的方波推動電路，以 CH1、CH2 分別觀察 a 點及波形產生器的波形，並且調整可變電阻器 R，得到圖 12(a)、(b)、(c)三種波形。記錄上述三種波形時之電阻值及 CH1、CH2 的波形。檢查 R 與 R_1 、 C_1 、C 之間的關係。
- 2.將方波改為正弦波及三角波，比較不同電阻值時，波形的變化。

(三)調節兩條 10:1 接線的補償電容：

將示波器本身產生的 1kHz 方波輸入觀察，小心以小起子調節補償電容，使方波波形成最完美的方形。一旦調好，兩條接線不可對調使用，因為每條接線，每個 Channel 的特性不盡相同。

(四)週期性的充電現象：

- 1.以波形產生器之方波推動圖 15 的電路，利用示波器 CH1 接到波形產生器，CH2 接到電容器；同時觀察 $v_i(t)$ 與 $v_c(t)$ 。(若使用 CH1-CH2 方式則可以看到電阻器電壓的波形)
- 2.調整波形產生器使方波週期為 $T=1\sim 5\tau$ ，觀察 $v_c(t)$ 、 $v_R(t)$ 及波形產生器的波形變化。 $(\tau=RC)$
- 3.方波週期改為 $T=0.5\tau$ 、 5τ 、 50τ ，並比較 $T=0.5\tau$ 、 $T=5\tau$ 、 $T=50\tau$ 時， $v_i(t)$ 、 $v_c(t)$ 、 $v_R(t)$ 的波形。
- 4.選用一個適當的週期，測量 RC 電路的上昇時間。可利用示波器上 0%、10%、90%、100% 這 4 條線測量。比較 τ 的測量值與計算值。
- 5.波形產生器的內阻可以忽略不計嗎？為什麼？

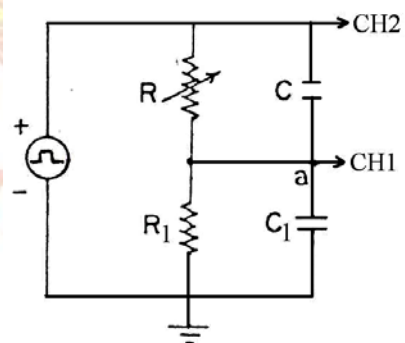


圖 14 補償電路。

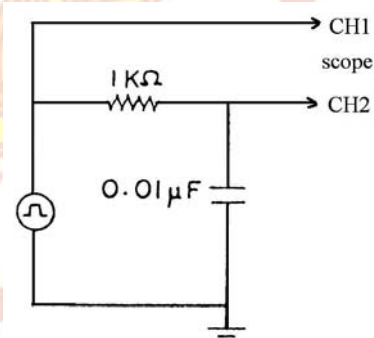


圖 15 週期性的充放電現象。

6. 改用其它 R 、 C 值，重覆步驟 1~4。

(五) 正弦電壓的反應：

1. 如圖 15 之電路，將方波輸入改為正弦波。
2. 觀察電容器電壓和相位角隨頻率變化的情形，記錄幾個頻率的電壓和相位角^{#3}，繪出它們對頻率的關係圖^{#4}，並決定半功率點 $f_{1/2}$ 。
3. 將步驟(四)-4 測得之 t_τ ，代入 $f_{1/2} = 0.35/t_\tau$ 求出 $f_{1/2}$ ，與計算值及步驟 2 的 $f_{1/2}$ 三者作比較。

#3 相位角的測量可以利用李沙傑曲線

或在示波器時間軸上讀取。

#4 為了涵蓋較大頻率範圍，此處宜以

$\log f$ 為橫軸座標。

五、問題：

1. 證明 RC 電路的上昇、下降時間是 $2.2RC$ 。證明 RC 電路中，電容器充電(或放電)到一半所需的時間 $t_{1/2} \approx 0.6931 RC$ 。
2. 如圖 16 之電路，以恆流源驅動 RC 並聯電路。證明這個電路的时间常數和以恆壓源驅動的 RC 串聯電路相同。
3. 以 X-Y 方式操作示波器，去測量兩個信號的相位差 X 軸輸入為 V_i ，Y 軸輸入為 V_R ，得到圖 17 的圖形，試證明 ϕ 可以由下式算出：

$$\sin \phi = \frac{B}{A}$$

4. 圖 18 以雙軌跡示波器測量電路，錯誤何在？
5. 以雙軌跡示波器測量兩個信號間的相位差，Trigger source 絕對不能選擇 V. Mode，為什麼？
6. 列出測量相位差的各種方法，並說明其優點、缺點。

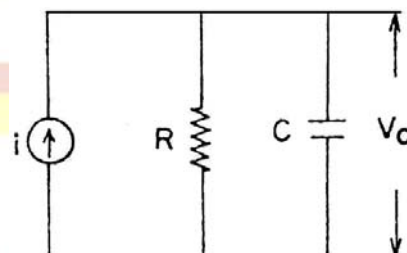


圖 16 問題 2 之電路。

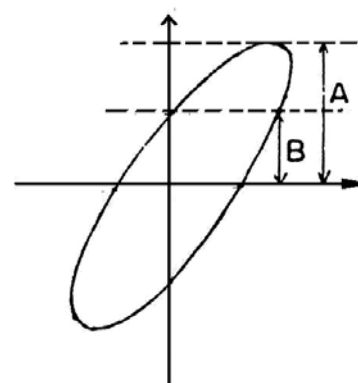


圖 17 相位差 $\phi = \sin^{-1} \frac{B}{A}$

六、參考文獻：

1. C. A. Desoer and E. S. Kuh : Basic Circuit. Theory (McGraw-Hill, 1969), § 4.1.1, p.110。
2. 示波器的原理與功能。
3. D. Halliday and R. Resnick, Fundamentals of physics, extended 3rd ed., (John Wiley & Sons, Inc., 1988), § 29- 8, p.673。

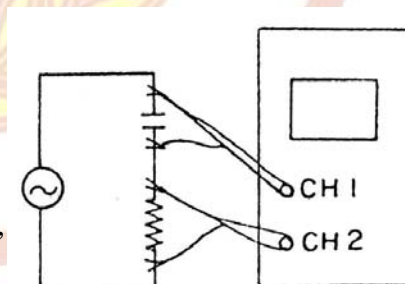


圖 18 問題 4