

力學耦合振盪

一、目的:

研究質量彈簧系統耦合振盪和強迫耦合振盪的現象。

二、原理:

(一) 耦合振盪

兩部滑車 S_1 和 S_2 ，質量分別為 m_1 與 m_2 ，和三條彈簧以圖1所示的方式連接。彈簧的力常數分別為 k_1 、 k' 及 k_2 。如果任意推動某一滑車， S_1 或 S_2 是否作簡諧振盪?以下就 $m_1=m_2=m$ ， $k_1=k_2=k$ 的情況，探討 S_1 與 S_2 的運動。

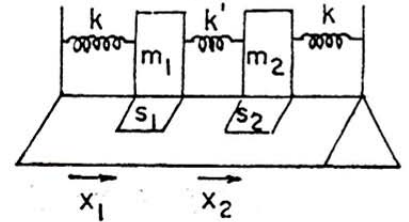


圖1 耦合振盪裝置。

首先設定 S_1 與 S_2 的運動坐標，以 S_1 與 S_2 的平衡位置分別作為 x_1 坐標和 x_2 坐標的原點。由牛頓定律，可以得到滑車 S_1 的運動方程式為

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 - k'(x_1 - x_2) \quad (1)$$

S_2 的運動方程式為

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \quad (2)$$

因此，所得的方程組為

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k + k')x_1 - k'x_2 &= 0 \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + (k + k')x_2 - k'x_1 &= 0 \end{aligned}$$

上面的聯立方程式也可以由Lagrangian方法求得(文獻1)。假設系統作簡諧振盪，可以令

$$\begin{aligned} x_1 &= B_1 e^{j\omega t} \\ x_2 &= B_2 e^{j\omega t} \end{aligned}$$

代入方程組中，得

$$\begin{aligned} (-m\omega^2 + k + k')B_1 - k'B_2 &= 0 \\ -k'B_1 + (-m\omega^2 + k' + k)B_2 &= 0 \end{aligned}$$

這是二元一次聯立方程組， B_1 與 B_2 不同時為零(否則便沒有振盪)的條件是

$$\begin{vmatrix} (-m\omega^2 + k + k') & -k' \\ -k' & (-m\omega^2 + k' + k) \end{vmatrix} = 0$$

即

$$(-m\omega^2 + k + k')^2 - k'^2 = 0$$

解之得

$$\omega^2 = \frac{k + 2k'}{m} \quad \text{或} \quad \frac{k}{m}$$

故振盪的頻率為

$$\omega = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}} \quad \text{或} \quad \sqrt{\frac{k}{m}}$$

這兩種振盪模式稱為簡正模式(normal mode)。將 ω 代入方程組便可以求出 B_1 和 B_2 的關係。

(1)反對稱模式:如果 $\omega = \sqrt{(k + 2k')/m} = \omega_a$ ，則

$$B_1 = -B_2$$

此時兩個滑車作反方向的簡諧振盪。

(2)對稱模式: 如果 $\omega = \sqrt{k/m} = \omega_s$ ，則

$$B_1 = B_2$$

此時兩滑車作同方向的簡諧振盪。

從另一觀點來看，當系統作對稱模式簡諧振盪時，兩滑車的運動方式是同步的，彈簧 k' 並沒有伸縮，可以看作每一個滑車各自只受一條力常數為 k 的彈簧作用，振盪頻率為 $\omega_s = \sqrt{k/m}$ 而；反之，系統作反對稱模式簡諧振盪時，兩滑車的振幅相同而運動方向剛好相反。 k' 彈簧約伸兩條彈簧的兩倍，此時系統的質心，即 k' 彈簧的中心點，並不做運動，相當於把彈簧 k' 從中點切成兩段，每段力常數為 $2k'$ ，即如圖2所示，振盪頻率為

振盪頻率為 $\omega_a = \sqrt{(k + 2k')/m}$ 。

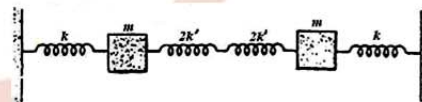


圖 2 簡正模式。

(二)簡正模式的搞合:

假如我們讓兩個滑車作自由運動，這個系統的運動方式是兩個簡正模式的線性組合，也就是說

$$x_1 = A_1 e^{j\omega_s t} + B_1 e^{-j\omega_s t} + C_1 e^{j\omega_a t} + D_1 e^{-j\omega_a t}$$

$$x_2 = A_2 e^{j\omega_s t} + B_2 e^{-j\omega_s t} + C_2 e^{j\omega_a t} + D_2 e^{-j\omega_a t}$$

對於不同的起始狀態， x_1 與 x_2 會有不同的運動方程式。例如把滑車1平移某一距離 α ，滑車2則留在原平衡位置(在輕輕按住滑車2的情況下對滑車1施與位移)，然後將兩車同時由停止釋放，便可得到一種起始條件為 $x_1(0) = \alpha, x_2(0) = 0, v_1(0) = v_2(0) = 0$ ，經過化簡後得到

$$x_1 = \frac{\alpha}{4} \left[e^{j\omega_s t} + e^{-j\omega_s t} + e^{j\omega_a t} + e^{-j\omega_a t} \right]$$

$$= \alpha \cos \left(\frac{\omega_s + \omega_a}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_a - \omega_s}{2} t \right)$$

$$x_2 = \frac{\alpha}{4} \left[e^{j\omega_s t} + e^{-j\omega_s t} - e^{j\omega_a t} - e^{-j\omega_a t} \right]$$

$$= \alpha \sin \left(\frac{\omega_s + \omega_a}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_a - \omega_s}{2} t \right) \quad (4)$$

其運動方式如圖3所示。但要注意的是圖3每一個虛線波包內含有數個較小波形，是 $\omega_a \approx \omega_s$ 的情況下得到的，因此條件是弱耦合(weak coupling) $k' \ll k$ ，這時彈簧 k' 需要比兩條 k 彈簧長很多，而本實驗中三條彈簧性質相近，不易觀察圖3的現象。圖3顯示:當第一個滑車的振幅為極大時，第二滑車的振幅恰為最小，表示能量在兩滑車之間傳遞。

如果採用較一般性的起始條件，兩滑車由靜止釋放， x_1 與 x_2 可表示為

$$x_1 = \alpha_1 \cos \omega_s t + \beta_1 \cos \omega_a t$$

$$x_2 = \alpha_2 \cos \omega_s t + \beta_2 \cos \omega_a t$$

可以仿照RLC實驗方式，在複數平面上分析 x_1 的運動方式(如圖4)，則 x_1 的振幅會隨時間改變，大小為

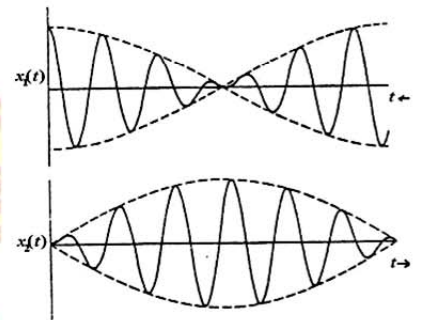


圖3 耦合振盪中兩滑車位移對時間函數關係。

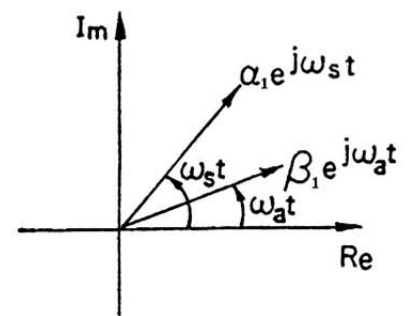


圖4 以複數平面分析耦合振盪。

$$\left[\alpha_1^2 + \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 \cos(\omega_s - \omega_a)t \right]^{1/2}$$

這個振幅會在 $\alpha_1 + \beta_1$ (兩個相量剛好同方向) 與 $|\alpha_1 - \beta_1|$ (兩個相量剛好方向相反) 之間，只有在 $\alpha_1 = \beta_1$ 的情況下才會得到圖3的情形。在做力學振盪實驗的強迫振盪部份，因為驅動振盪與自然振盪之間的耦合現象，實驗步驟所謂“等振盪穩定”，確實不容易達到，而會觀察到振幅“忽大忽小”的現象。

(三)強迫搞合振盪:

一個自然頻率為 ω_0 的系統，如果受到頻率為 ω 的外源驅動，會做強迫振盪，而且在 $\omega = \omega_0$ 附近，振幅非常大，稱為共振。耦合振盪的系統具有兩個自然頻率，在作強迫振盪時也會有兩個共振頻率。我們將在實驗中證實這一點。

我們以理論來分析(文獻2):假設系統受到一個頻率為 ω 的外源驅動力 $F_0 \cos \omega t$ ，直接推動滑車S1，則新的運動方程組為

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k + k')x_1 - k'x_2 &= F_0 \cos \omega t \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} - k'x_1 + (k + k')x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

要求出其特殊解(particular solution)，假設

$$\begin{aligned} x_1 &= D_1 \cos \omega t \\ x_2 &= D_2 \cos \omega t \end{aligned} \quad (6)$$

代入方程組(4)式，解出 D_1 、 D_2 ，得到

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{(F_0/m)(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (k'/m)^2} \\ D_2 &= \frac{(F_0/m)(k'/m)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (k'/m)^2} \end{aligned}$$

因為 $k'/m = \omega_0^2 - \omega_s^2$ ， $\omega_a^2 = \omega_0^2 - \omega_s^2$ ，所以

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{(F_0/m)(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_s^2 - \omega^2)(\omega_a^2 - \omega^2)} \\ D_2 &= \frac{(F_0/m)(\omega_0^2 - \omega_s^2)}{(\omega_s^2 - \omega^2)(\omega_a^2 - \omega^2)} \end{aligned} \quad (7)$$

將 D_1 、 D_2 對 ω 作圖即可得到圖5的關係圖，圖中負值振幅表示滑車運動與驅動力相位相反。當驅動頻率在 ω_s 時，兩滑車做同向運動，而驅動頻率在 ω_a 附近時，兩滑車作反向運動。

三 儀器與配件:

空氣軌、滑車、彈簧、磁鐵、驅動馬達、馬表、直流電源、車擺。

四、步驟:

(一)耦合振盪:

1. 選取 k 值相同的彈簧兩條，中間連接一部滑車，使滑車作小振幅振盪，測量振盪的週期，以決定 k 值。
2. 兩部滑車以圖1所示的方式連接(必須各貼兩塊小磁鐵)，任意推動滑車，觀察所引起的運動是否為簡諧振盪。
3. 將兩部滑車同時向右移10 cm，同時放手，觀察兩車是否作簡諧振盪，測量振盪週期。
4. 將兩部滑車向相反方向各移5 cm，同時放手，觀察兩車是否作簡諧振盪，並測量振盪週期。
5. ω_a 與 ω_s 各為多少？它們的比值是多少？試與公式理論計算值比較。

(二)強迫耦合振盪:

1. 如圖1方式連接滑車，並在滑車上附貼磁鐵作為阻尼之用，將一邊的彈簧連接馬達。
2. 改變馬達頻率，觀察振幅的變化，作出振幅對頻率的關係圖。
3. 試將所得結果與圖5作比較。

(三)其它耦合振盪:

1. 將滑軌架在兩實驗桌之間，以滑車懸掛單擺的系統(如圖6)作耦合振盪。
2. 試以實驗方式決定振盪的 ω_s 與 ω_a 。
3. 以圖7方式(或更多的滑車和彈簧之組合)進行耦合振盪實驗。試以實驗方法找出簡正模式(normal mode)來?

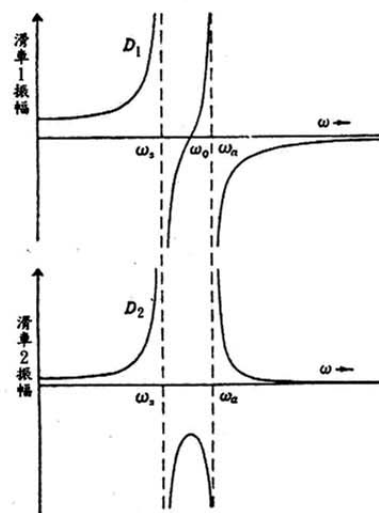


圖 5 強迫振盪時各滑車振幅與驅動頻率的關係。

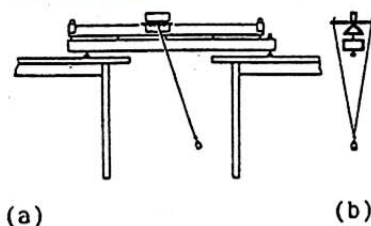


圖 6(a)滑車-單擺耦合系統。
(b)單擺側視圖。

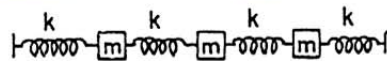


圖 7 三個以上滑車之耦合振盪。

五、問題:

1. 步驟(一)之2為何需要貼上小磁鐵?小磁鐵質量對於 ω 有何影響?
2. 在強迫耦合振盪中,如何確定系統已經到達"平衡狀態"?
3. 如果馬達頻率在 ω_a 或 ω_s 附近,振幅是否會變得很大,超過彈簧的線性範圍?
4. 試以數學方式探討步驟(三)之1與(三)之2所使用的系統。
5. 你已做過各種關於滑車的實驗,請試著設計一種記錄滑車位置對時間關係的實驗方法。

六、參考文獻:

1. J. B. Marion: Classical Dynamics of Particles and Systems, 2nd ed., (歐亞書局, 台灣版, 1985年), §13-2, p.409。(3rd ed., §11-2, p.409)
2. J. B. Marion: Classical Dynamics of Particles and Systems, 2nd ed., (歐亞書局, 台灣版, 1985年), §13-4, p.415。
3. K. U. Ingard : Fundamentals of Waves and Oscillations (Cambridge University Press, 1988), Chap.5, p.113~ p.149。
4. 李怡嚴:大學物理學,十五版(東學書局,民國76年10月), §6- 8, p.380。
5. M. Alonso & E. J. Finn: Fundamental University Physics (Addison - Wesley Publishing Co., 1967), §12-10, p.367 ~ p.372。