

## 力學振盪

### 一 目的:

利用滑車在空氣軌上作一維振盪，觀察阻尼振盪與強迫振盪的現象。

### 二、原理:

振盪是力學上常見的現象，有關振盪的觀念可以引用到物理學和工程學的其他部分，因此很值得加以研究。我們擬利用空氣軌來進行一維振盪運動的觀察。以下只簡述振盪的概念和觀察的方法，有關數學推演的詳細過程請參考文獻1。

#### (一)簡諧振盪 (SHM, simple harmonic oscillation)

假設有一物體在離開平衡點時，受到的恢復力與位移成正比，即

$$F = -\kappa x$$

按照牛頓的第二定律，其運動方程式為

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\kappa x \quad (1)$$

令  $k/m = \omega_0^2$ ，可得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2)$$

這個方程式的解所具有的基本形式為

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \delta) \quad (3)$$

$x_0$  和  $\delta$  是由起始條件決定的常數，週期  $T = 2\pi / \omega_0$ 。這種運動稱為簡諧振盪。

#### (二)阻尼振盪 (damped oscillation)

如果物體除了彈簧的恢復力之外，同時還受到一個和速率成正比的阻滯力  $m\lambda dx/dt$ ，則其運動方程式為

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F = -\kappa x - m\lambda \frac{dx}{dt} \quad (4)$$

此處  $dx/dt$  的係數中， $m$  是為了方便而加入的， $\lambda$  稱為阻尼係數。整理使得到

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5)$$

以(3)式 $x = x_0 \cos(\omega t + \delta)$  代入(5)式，可以求出運動的角頻率 $\omega$ 。物體是否作振盪，視 $\lambda$ 與 $\omega_0$ 的關係而定：

1.  $\lambda > 2\omega_0$  : 稱為過阻尼(overdamping)。
2.  $\lambda = 2\omega_0$  : 稱為臨界阻尼(critical damping)。

以上兩種情形下，物體並不作往復運動，而是漸漸趨向平衡點。其中臨界阻尼趨向平衡點較快，故一般儀表設計時都採用臨界阻尼條件，以縮短反應所需的時間。

3.  $\lambda < 2\omega_0$  : 稱為次阻尼(underdamping)。
- 這時(5)式的解可以寫成下面的形式

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t/2} \cos(\omega_d t + \delta) \quad (6a)$$

其中

$$\omega_d = \omega_0^2 - \lambda^2/4 \quad (6b)$$

這種運動顯然並不是一個週期性的運動，因為每重覆一次，物體不會回到原先的最大位移，所以只能稱為往復運動。但在 $\lambda$ 不太大時，還是可以近似地當作一個振幅逐漸衰減的簡諧振盪，只是頻率比 $\omega_0$ 稍低一點。如果 $t = 0$ 時，位移是一個極大值 $x_0$ ，每經一個"週期" $T_d = 2\pi / \omega_d$ 之後，位移極大值依次為 $x(T_d) = x_0 e^{-\lambda T_d/2}$ ， $x(2T_d) = x_0 e^{-\lambda T_d}$ 等等，可見這種運動的最大位移是隨著時間呈指數函數的方式衰減的。在圖1中，經過各極大值可以畫出一條包跡的方程式為

$$x = x_0 e^{-\lambda t/2} \quad (7)$$

定義半生期 $T_{1/2}$ 為 $x$ 降到 $(x_0/2)$ 所需的時間，則

$$T_{1/2} = 2 \ln 2 / \lambda \quad (8)$$

因此，由 $T_{1/2}$ 可以推算出阻尼係數 $\lambda$ 。若在半對數紙上畫出 $x$ 對 $t$ 的關係，得到一條直線，由直線的斜率，亦可求出阻尼係數 $\lambda$ 。

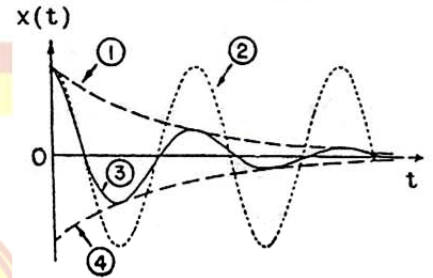


圖 1 次阻尼振盪。

- ①  $x_0 e^{-\lambda t/2}$
- ②  $\lambda = 0$  之振盪
- ③  $\lambda = 0.4 \omega_0$  之振盪
- ④  $-x_0 e^{-\lambda t/2}$



實驗中利用兩塊大磁鐵以圖2所示方式吸附於滑車上，來產生阻止滑車運動所需的阻尼。由橫切面圖可以看出兩塊磁鐵的磁力線深入空氣軌，當滑車運動時，磁場跟著滑車一起移動，使得軌道面上產生局部磁通量變化。根據法拉第感應定律，為了彌補磁通量的變化，該局部會產生感應電動勢及渦流，以反抗磁鐵的運動。

磁通量變化 $d\Phi/dt$ 和滑車的速率 $v$ 成正比，渦電流 $i$ 與磁通量變化成正比，因此，渦電流對滑車所引起的阻滯力與滑車速率 $v$ 成正比。阻尼係數的大小，可以利用磁鐵的位置來調整，磁鐵越靠近軌道面，阻尼係數越大。

### (三) 強迫振盪：

如果物體除了恢復力和阻滯力之外，遭受到一個過期性的驅動力 $F_0 \cos \omega t$ ，則運動方程式為

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F = -\kappa x - m\lambda \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t \quad (9)$$

整理後，得到

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t / m \quad (10)$$

當時間長到起始狀態可以忽略時(文獻1)，這個方程式的穩定解的形式如下

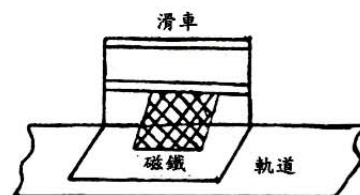
$$x = x_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (11)$$

這裡

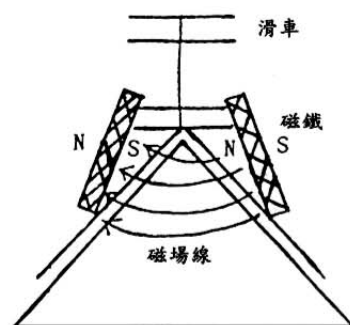
$$x_0 = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \lambda^2}} \quad (12)$$

$$\delta = -\tan^{-1} \frac{\omega \lambda}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (13)$$

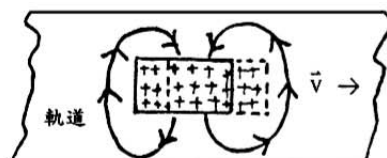
這是一個和驅動力頻率相同的簡諧振盪，它的振幅和驅動力的頻率有關(參看圖3)。頻率極低時，滑車加速度很小，此時，幾乎所有的力都用來拉彈簧，振幅約為 $F_0/k$ 。頻率極高時，滑車來不及反應，振幅幾乎為零。當頻率為共振頻率 $\omega_R$ 時振幅最大。由(12)式可得<sup>#1</sup>



(a) 阻尼振盪裝置圖

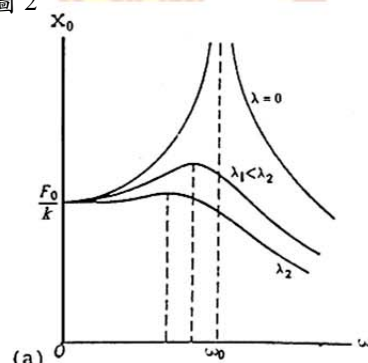


(b) 橫切面圖

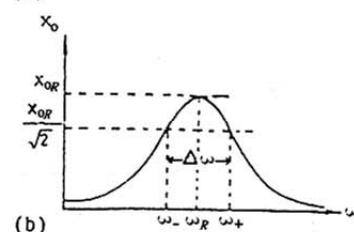


(c) 渦流方向

圖 2



(a)



(b)

圖 3

#1 做阻尼振盪時，由於加上磁鐵，因此系統的質量增加，自然頻率 $\omega_0$ 不再等於滑車未加磁鐵時的自然頻率，因此必須修正滑車質量 $m$ ，找出正確的自然頻率 $\omega_0$ ，進而決定正確的共振頻率 $\omega_{0R}$ 與共振振幅 $x_{0R}$ 。

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} / 2 \quad (14)$$

當  $\lambda \ll \omega_0$  時， $\omega_R \approx \omega_0$ ，共振振幅  $x_{OR}$  約為

$$x_{OR} = F_0 / m \omega_0 \lambda$$

振盪器的特性可用最大振幅和頻寬來表示。定義  $\omega_{\pm}$  為振幅降至共振振幅的  $1/\sqrt{2}$  倍處所對應的頻率，且  $\omega_- < \omega_R < \omega_+$ 。同時，定義振盪器的頻寬  $\Delta\omega$  為

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$$

如果  $\Delta\omega$  很小，在  $\omega_R$  附近振幅隨頻率的改變很大，因此，振盪器對頻率的選擇性很高；反之， $\Delta\omega$  很大者，振盪器對頻率的選擇性低。

由(12)式可知，當  $\lambda$  很小時， $\omega_{\pm}$  滿足

$$(\omega_0^2 - \omega_{\pm}^2)^2 + \omega_{\pm}^2 \lambda^2 \approx 2\omega_0^2 \lambda^2$$

$\lambda$  很小時，因  $\omega_{\pm} \approx \omega_0$ ，所以

$$\omega_{\pm} \approx \sqrt{\omega_0^2 \pm \omega_0 \lambda} \approx \omega_0 (1 \pm \lambda / 2\omega_0) \quad (17)$$

將(17)式代入(15)式，即得

$$\Delta\omega \approx \lambda \quad (18)$$

一般使用品質因數(Quality factor)  $Q$  來表示振盪器對阻尼的反應情形。

$$Q \equiv \omega_R / \lambda \quad (19)$$

在阻尼係數  $\lambda$  很小時

$$Q \approx \omega_0 / \Delta\omega \approx 2\pi \times \frac{\text{振盪器總能量}}{\text{一個週期所消耗的能量}} \quad (20)$$

因此， $Q$  值越大時，振盪器對頻率的選擇性越高，經過每一週期所消耗能量的比例也越小。

本實驗中，將一條彈簧的一端掛在同步馬達上(參看圖4)，產生實驗所需之驅動力，馬達的轉速可以利用DC可變電壓源來調節。如果選擇平衡位置的座標為  $x=0$  則滑車在  $x$  位置所受的力為

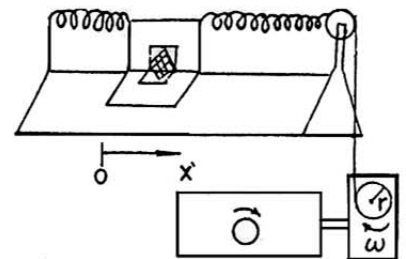


圖 4

$$F = -\kappa x - \kappa(x - r \cos \omega t) - m\lambda \frac{dx}{dt}$$

$$= -2\kappa x - m\lambda \frac{dx}{dt} + \kappa r \cos \omega t$$

其中  $\kappa r \cos \omega t$  即為週期性驅動力。

### 三、儀器與配件:

空氣軌一組，Datastudio測量器，滑車兩部，彈簧數條，磁鐵若干個，馬表一隻，同步馬達及直流電源各一個。

### 四、步驟:

#### (一)決定彈簧特性

- 1.以兩條彈簧<sup>#2</sup>則與滑車連接系統，決定實驗當中所使用彈簧長度的範圍<sup>#3</sup>。(亦可用虎克定理量測K值)
- 2.將裝置拆下，以圖5方式測量外力—伸長度函數關係，決定各個彈簧的 $\kappa$ 值，並確定在欲使用長度範圍，外力與伸長度呈線性關係。
- 3.以滑車—砝碼振盪方式決定彈簧的 $\kappa$ 值。

#2 本實驗所用之細彈簧極為脆弱，補充不易，應多加珍惜，切勿過度拉長。放置時應每樣分開，平行放置，以避免糾纏。如有必要，可以藉振盪週期反推 $\kappa$ 值。

#3 注意；如果彈簧長度不夠，可以用活動式的端點固定在空氣軌上的適當位置，以縮短固定點間的距離。

#### (二)阻尼振盪

- 1.將兩片大磁鐵用膠帶貼在滑車上，必須確定貼牢以免滑動，位置如圖2所示。
- 2.用兩條細彈簧把滑車連接到軌道的兩個端點，記錄靜止時的平衡位置。將滑車移離平衡位置約10cm後放手，記錄滑車每次到達最大位移時的位置。
- 3.用馬表測量振盪週期，為了精確起見，可以測5個週期的時間再求平均值。
- 4.繪出最大位移對時間的關係圖，求出 $T_{1/2}$ 。再由(8)式求出 $\lambda$ 。
- 5.在半對數紙上畫出最大位移對時間的關係圖，是否接近一條直線？由此線的斜率求出 $\lambda$ 。
- 6.拆去彈簧，使滑車滑動，利用火花打點記錄作 $v-t$ 圖，決定 $\lambda$ 值。
- 7.比較步驟4、5、6所得的 $\lambda$ 值，並討論之。

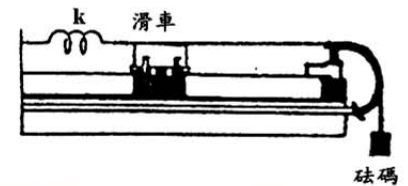


圖 5

#### (三)強迫振盪



1. 不要動滑車上的兩片磁鐵。如圖4所示，並在滑車彈簧連到馬達的線中間插結一條橡皮筋，並調整線長，使滑車振盪時，線及橡皮筋不要彎曲。
2. 先調整DC可變電源的輸出電壓，找出自然頻率 $f_0$ 的大約值。
3. 以數據擷取系統同時記錄滑車位置及滑輪的旋轉角度。(正比於驅動力)
4. 從慢轉速( $f \leq 1/3f_0$ )開始，逐漸增加 $f$ 超過 $f_0$ ( $f \geq 2f_0$ )為止。每次改變轉速都要在滑車振動的最大位移已維持固定時為之。
5. 在穩定振動範圍內測量振幅，以及振動和驅動力間的相位差 $\delta$ 。
6. 畫出振幅對頻率的關係圖，看看是否類似圖3的響應曲線。由此曲線找出共振頻率 $\omega_R$ 和頻寬 $\Delta\omega$ 。
7. 畫出相位差 $\delta$ 對頻率的關係圖並與(13)式比較。
8.  $\omega_R$ 和步驟(二)中的 $\omega_d$ 相近嗎? $\Delta\omega$ 和步驟(二)中的 $\lambda$ 相近嗎?試討論之。
9. 請解釋改變頻率時的振幅不穩定現象的原因(transient effect)，並以傅式分析證明你的解釋。

#### (四) 不同 $\lambda/\omega_0$ 值之比較

改用不同的阻尼條件或不同的彈簧組合，重覆阻尼振盪與強迫振盪，以作比較。

#### 五、問題:

1. 在做強迫振盪實驗時，滑車上所貼磁鐵的位置，常會造成實驗進行難易程度上相當大的差別，為什麼?試詳加討論。
2. 作強迫振盪時，驅動馬達若不在空氣軌正下方，會造成什麼後果?
3. 如果在改變阻尼條件(步驟(四))時採用直接在滑車上加幾塊磁鐵的方式，所得到的兩條共振曲線可能會像圖6所示，試解釋之。
4. 因為有Transient effect(文獻5)。強迫振盪的振幅可能忽大忽小，如何確定振盪已達平衡?可不可以不等平衡，直接以最大振幅和最小振幅的平均值當作(11)式的 $x_0$ ?為什麼?

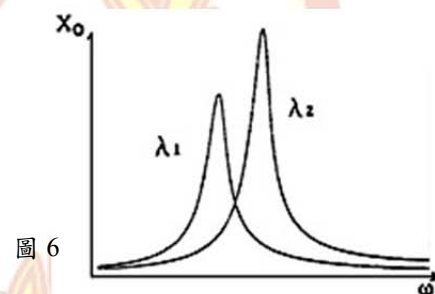


圖 6

六、參考文獻:

1. J. B. Marion: Classical Dynamics of Particles & Systems 2nd ed. (歐亞書局，台灣版，1985)，3-2，p.93. §3-5, p.101, §4-2, p.118。 (3rd ed., §3-5, p.106, §3-6, p. 114)
2. D. Halliday & R. Resnick : Fundamentals of Physics, extended 3rd ed. ( John Wiley & Sons, Inc., 1988 )§14-8, p.318 §14-9, p.320。
3. 李怡嚴：大學物理學，十五版(東華書局，民國76年10月)，§6-9, p.387, §6-10, p.392。
4. M. Alonso & E. J. Finn : Fundamental University Physics ( Addison - Wesley Publishing Co., 1967), §12-12 ~ §12-13, p.374~p.380。
5. 施奇廷，徐志偉：振盪，清華物理第20期，(民國77年)，p. 88。

