

重力常數測定

一 目的:

利用卡文迪希(Cavendish)的方法測定重力常數。

二、原理:

1666年牛頓根據自由落體和天體的運動，推導出萬有引力定律。當時因為數學工具不足，無法嚴謹地驗證該定律而遲遲未發表。之後，他寫下微積分理論，證實了萬有引力定律的正確性，才於1686年發表。

萬有引力定律告訴我們:兩物體間的重力為吸引力，方向在兩物體的連心線上，力的大小和兩物體的質量 m 、 M 乘積成正比，和兩物體間距離 d 的平方成反比，即:

$$F = G \frac{mM}{d^2} \quad (1)$$

其中 G 是重力常數。根據這個定律，地面上的物體所受的地球引力為

$$F = G \frac{mM_e}{R_e^2}$$

其中 M_e 為地球質量， R_e 為地球半徑。在地球表面附近，物體所受的重力加速度 g 可視為常數，由牛頓第二定律可知

$$g = \frac{F}{m} = G \frac{M_e}{R_e^2}$$

其中 g 和 R_e 並不難測量。因此只要測出 G 值，就可以算出 M_e 了!基於這個理由，測量 G 值的實驗常被戲稱為“地球”。

1798年，卡文迪希利用密歇爾(Michell)發明的扭擺首先得到準確的 G 值。如今公認最精確的 G 值是

$$G = (6.6726 \pm 0.0010) \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$$

卡文迪希的實驗裝置如圖1所示，兩個質量為 m 的小球固定在一支細棒的兩端，細棒中央固定一個反射鏡，這個T型物懸掛在一條細石英線末端形成扭擾。當兩個質量為 M 的大球放在 A_1 、 A_2 位置時，兩個小球被大球吸

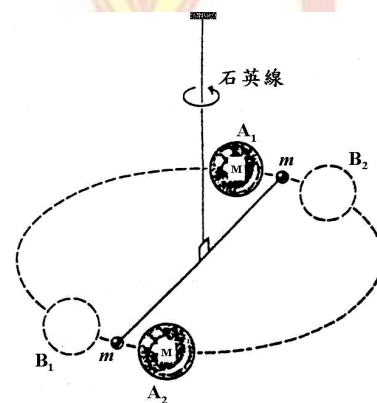


圖1 卡文迪希測重力常數之實驗裝置。

引，使石英線受到力矩而循順時針方向扭轉(指由上向下俯視)。把兩個大球換到B₁、B₂位置時，石英線則循逆時針方向扭轉。實驗中將一束光線投射到反射鏡上，觀察遠處直尺上的反射光。當鏡子轉動一個小角度 θ 時，反射光線會偏轉 2θ 的角度。如果把兩個大球由A₁、A₂位置換到B₁、B₂位置，反射光改變的角度共為 4θ 。假設鏡子到直尺的距離為L，反射光在直尺上移動的總距離為 Δx ，則

$$4\theta = \Delta x/L$$

致使小球改變平衡位置的是兩個大球，因此計算系統所受的力矩時，需要計算各小球所受的力。假設小球和鄰近大球兩者球心間的距離為 d (參看圖2)，小球球心和中央懸掛點的距離為 r ，則另一大球與小球的距離為 $[(2r)^2 + d^2]^{1/2}$ 。石英線因右側小球受大球吸引所受的力矩(以鉛垂向上為 $+\hat{z}$ 軸)為

$$\begin{aligned}\tau_1 &= r_1 \times F_1 + r_1 \times F_2 \\ &= \frac{\alpha GMmr}{d^2} \hat{z}\end{aligned}\quad (3)$$

其中 α 是因為第二個大球對小球的吸引力而做的修正項，原則上 r 越大， α 越接近於1

$$\alpha = 1 - \left(1 + \frac{4r^2}{d^2}\right)^{-3/2}$$

石英線所受的總力矩是由兩個小球造成的，其大小為 $|\tau_1|$ 的兩倍。因為 $\tau = -\kappa\theta$ ，如果測量扭擺的轉動週期 T ，扭擺的轉動慣量 I ，便可得知 κ 的大小

$$\kappa = I \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad (4)$$

而兩小球的轉動慣量為

$$I = 2mr^2 \quad (5)$$

由(3)、(4)和(5)式可得

$$G = \frac{\pi^2 r d^2 \Delta x}{\alpha M L T^2} \quad (6)$$

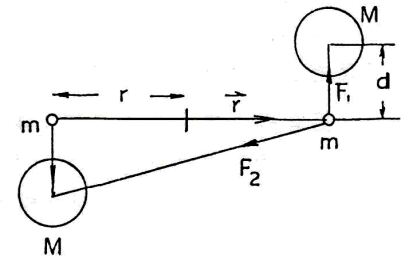


圖2 位於右測的小球受到兩個大球的重力。

實驗當中記錄光線位置的週期性變化可得到 T ；由光線位置與時間的關係圖(圖3)可找出光線的平衡位置。大球放在 A_1 、 A_2 位置時光線的平衡位置，和大球放在 B_1 、 B_2 時光線的平衡位置之差距即是 Δx 。

實驗所使用的儀器構造如圖4所示。扭擺以黃銅絲⑨懸掛在空腔⑩內，以預防振動幅度太大拉斷銅絲^{#1}。空腔利用玻璃①。密閉，以免外面氣流影響扭擺運動。小球②底下有一個托盤⑤，在搬動儀器前，必須先將托盤升高使它托住小球，以免振動過度而拉斷銅絲。反射鏡⑧是凹面鏡，可以使入射光線反射到直尺上時會聚在一起，不致於散開太多而造成讀取 Δx 的誤差。

實驗中利用一個短焦距的透鏡收集燈光到狹縫再投射到凹面鏡上，反射的光線會在某處會聚成狹縫的像。調整狹縫和凹面鏡之間的距離，使狹縫的像落在大的2m 遠的直尺上^{#2}。

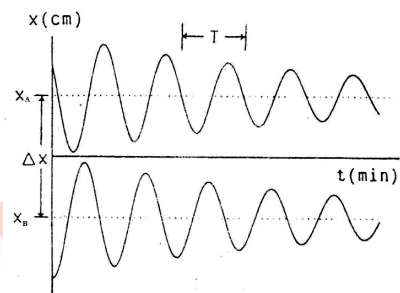
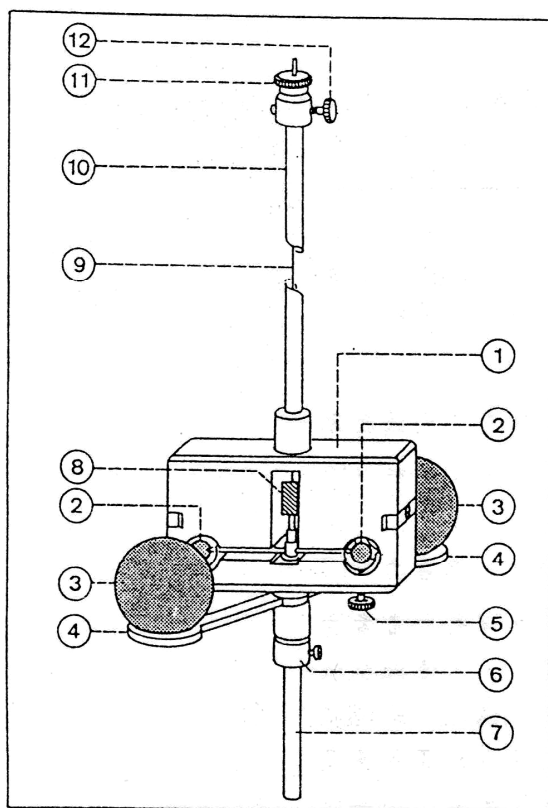


圖3 反射光線在直尺上的投影隨時間而變， x_A 、 x_B 分別為大球在 A_1 、 A_2 與 B_1 、 B_2 時之平衡點。

#1 本實驗儀器中的懸線為銅絲而非石英絲。儀器頂端有固定黃銅絲用的螺絲⑪、⑫，請勿轉動，以免拉斷黃銅絲。



- ① 金屬/玻璃盒
- ② 小鉛球
- ③ 大鉛球
- ④ 大球托盤
- ⑤ 小球托盤旋鈕
- ⑥ 大球托盤高度調整圓環
- ⑦ 固定用支架
- ⑧ 凹面鏡， $f \approx 30\text{cm}$
- ⑨ 黃銅絲
- ⑩ 黃銅絲護管
- ⑪ 黃銅絲固定端歸零旋鈕
- ⑫ 歸零固定鈕

圖4 重力實驗儀裝置

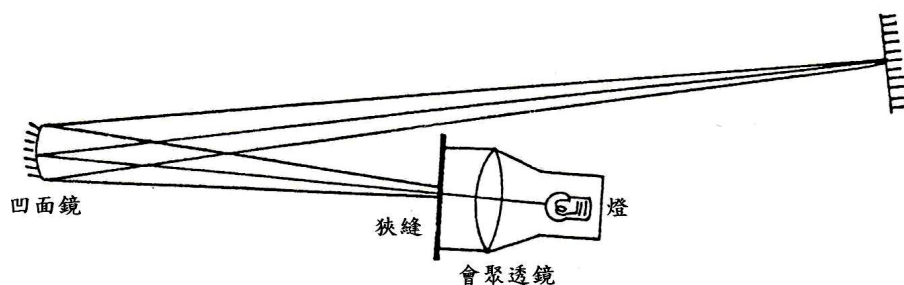


圖5 光線經會聚透鏡、狹縫後，由凹面鏡反射到直尺上。

三、儀器與配件:

重力實驗儀器，大球2個，光源，會聚透鏡，狹縫，直尺及支架。

[注意事項]

移動儀器前，應先檢查托盤是否已托住小球。若沒有，應旋轉兩個托盤下方的螺絲，使托盤上升托住小球。扭擺和光源放在一張桌子上，直尺則放在另一張桌子上，如此，讀取數據時就不必靠近扭擺，可以減少人為因素對實驗的影響。

四、步驟:

- 1.(參考圖5)接上光源^{#3}。將聚光透鏡固定在離凹面鏡約50 cm處。調節聚光透鏡和光源的位置，使凹面鏡得到最多的光。同時，在凹面鏡前約35cm處固定狹縫。調節直尺的位置，並微調狹縫的位置和燈光的方向(燈光應射到凹面鏡中心)使狹縫在直尺上成清晰的像，然後，將狹縫調窄，使直尺上的像變細。
- 2.輕輕將兩鉛球放在A₁、A₂位置，儘量避免儀器振動。之後，將托盤慢慢降下，使扭擺受重力吸引而轉動。
- 3.調節腳架的水平，使扭擺不會遭受任何摩擦力。
- 4.剛開始時因為振動幅度很大，扭擺在運動中常常會碰壁反彈，可將托盤升起後再慢慢放下，使振幅減小。大約半小時之後，扭擺運動趨於穩定，此時光線在尺上的移動為一簡諧運動，兩端點的運動速度為零，週期約為10分鐘。開始讀取數據，每半分鐘記錄光線在直尺上的位置一次，至少連續記錄半小時。

#2 為了收集較多的光，聚光透鏡必須

靠近光源。為了使穿過狹縫後的光線射到凹面鏡上的量較多，燈光經會聚透鏡後必須在凹面鏡上成像。

我們可以暫時取下狹縫，調節聚光透鏡和燈的位置使凹面鏡上的光線最強，然後再放回狹縫。

#3 可改用雷射光。

5. 將鉛球輕輕旋轉到 B_1 、 B_2 位置，重覆步驟4。
6. 以光線的位置對時間作圖，求出平衡點位置，和週期 T 。兩平衡點間的距離即為 Δx 。
7. 小球質量為 0.015kg ，半徑為 6.9mm ，與銅絲的垂直距離為 $r = 5.0\text{ cm}$ ，大球質量為 1.5kg ，半徑為 32mm 。
8. 參考圖6測量大、小球之間的距離 d ，若是大球正好碰觸玻璃盒， $d = 46.5\text{ mm}$ 測量 L ，代入(6)式求 G 值。
9. 重覆步驟2~6至少三次，求出 G 的平均值及標準差。

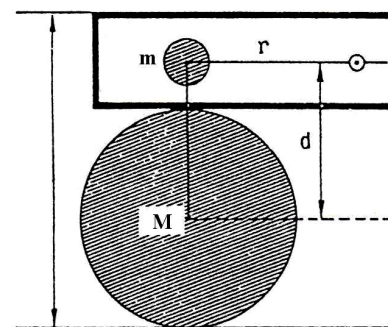


圖 6 測量小球與鄰近大球之距離 d 。

五、問題:

1. 增加大球質量，實際上對實驗並無太大幫助，為什麼?請討論之。
2. 一個體重 60kg 的人站在扭擺旁，對實驗的結果影響不大，為什麼?請討論。
3. 在(5)式計算 I 值時，假設(a)小球為質點，(b)反射鏡的轉動慣量為零，(c)細棒的轉動慣量為零。這些假設對 I 值有何影響?試評估之。
4. 導證(6)式的過程中假設小球與鄰近大球的距離為 d ，而且不受大球所在位置(A_1 、 A_2 與 B_1 、 B_2)的影響。試由 Δx 的實驗值計算大球位置對 d 和 G 值的影響。

六、參考文獻:

1. D. Haliday & R. Resnick: Fundamentals of Physics, extended 3rd ed., (John Wiley & Sons, Inc., 1988), §15-3 , p.333 。
2. M. Alonso & E. J. Finn: Fundamental University Physics (Addison - Wesley Publishing Co., 1967), §13 - 2, p.398 ~p.401 。
3. F. W. Sears, M. W. Zemansky & H. D. Young: University Physics, 6th ed., (Addison - Wesley Publishing Co., 美亞 , 1982) §4 - 4, p.64~p.66