

## 磁場的測量

一 目的:

利用霍爾探針測量線圈中的磁場分佈。

二、原理:

(一) 各種電流分佈所產生的磁場:

根據畢爾－薩伐特定律(Biot-Savart law)，任意分佈之電流 $I$ 在空間內 $P$ 點所產生之磁場(這裡一律採用SI制)為:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Idl' \times (r - r')}{|r - r'|^3} \quad (1)$$

其中 $r$ 為 $P$ 點所在之位置尚量， $dl'$ 為沿電流 $I$ 的方向之長度微分基素， $r'$ 為 $dl'$ 所在的位置向量(參考圖1)。常數 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N/A^2$ 。這裡一律採用SI制。本實驗共有三種電流分佈所產生的磁場:(1)環形單線圈(2)環形雙線圈(3)有限長之螺線管。

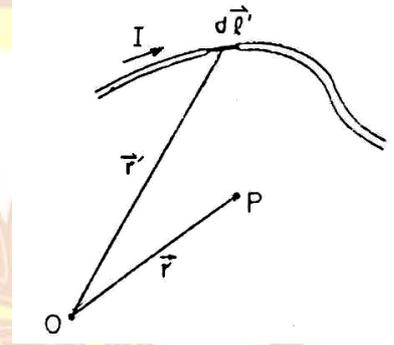


圖 1

1.環形單線圈:

由(1)式積分，得沿中心軸之磁場為:

$$B(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \quad (2)$$

其中 $a$ 為線圈半徑， $z$ 為沿線圈中心軸離線圈中心的距離，其正、負符號由右手定則決定。事實上，其它各

處之磁場為:  $B = B_r \hat{r} + B_\theta \hat{\theta}$  其中:

$$B_r = \frac{\mu_0 I a}{2r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} (2n+1)!!}{2^n n!} \frac{r_{<}^{2n+1}}{r_{>}^{2n+2}} P_{2n+1}(\cos \theta) \quad (3)$$

$$B_\theta = -\frac{\mu_0 I a^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!!}{2^n (n+1)!} \begin{cases} -\frac{2n+2}{2n+1} \frac{1}{a^3} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \\ \frac{1}{r^3} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \end{cases} P'_{2n+1}(\cos \theta) \quad (4)$$

$B_\theta$ 之上式對 $r < a$ 成立，下式對 $r > a$ 成立。 $B_r$ 式中，若 $r > a$ ，則 $r_{>} = r$ ， $r_{<} = a$ ;若 $r < a$ ，則 $r_{>} = a$ ，

$r_{<} = r$ ;  $P_l(\cos \theta)$ 及 $P'_l(\cos \theta)$ 分別為 Legendre function

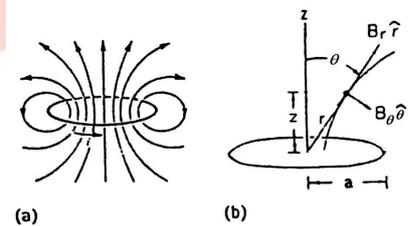


圖 2

和 associated Legendre function。同學如果不熟悉這些數學式子，可以暫時不管，只需參看圖2的磁場線分佈即可。本實驗為了降低線圈上的電流量，以數圈代替環形單線圈。

## 2. 環形雙線圈:

圖3表示兩個半徑同為 $R$ ，距離為 $d$ 的平行環形線圈，其上載有同方向的相等電流。根據向量的重疊原理，空間內各位置的磁場是由(3)式及(4)式相加而成的。由於數學形式相當複雜，這裡只將磁場線分佈繪於圖中以供參考。圖3中 $R$ 與 $d$ 的比值會影響到兩線圈間的區域內磁場的均勻性。如果 $d=R$ ，在 $P$ 點附近的磁場相當均勻(參考圖4)，這種線圈稱為 Helmholtz coil。

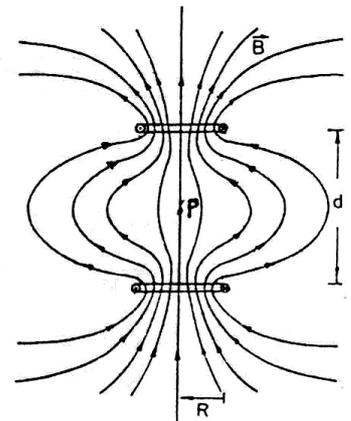


圖 3

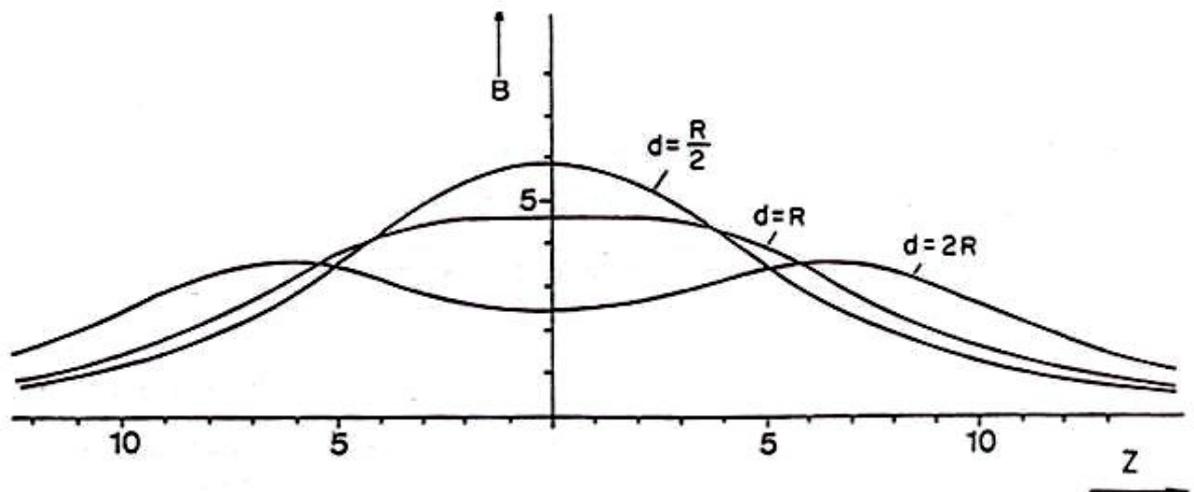


圖4 在各種 $d$ 和 $R$ 條件下，沿對稱軸上磁場強度與位置函數。

## 3. 有限長的螺線管:

把許多個同軸，同半徑的環形線圈串接起來，就變成螺線管。沿著對稱軸的磁場可以利用(2)式直接積分而得:

$$B(z) = \frac{1}{2} \mu_0 n I (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (5)$$

其中 $n$ 為單位長度內的線圈數， $\theta_1$ 與 $\theta_2$ 分別如圖5(a)所標示。沿對稱軸上各處之磁場分佈繪於圖5(b)之中。

在 $d \gg a$ 時，(5)式中。 $\theta_1 \rightarrow 0$ 、 $\theta_2 \rightarrow \pi$

則:

$$B(z) = \mu_0 n I \quad (6)$$

這是同學所熟知的，由無限長螺線管所產生磁場的公式。

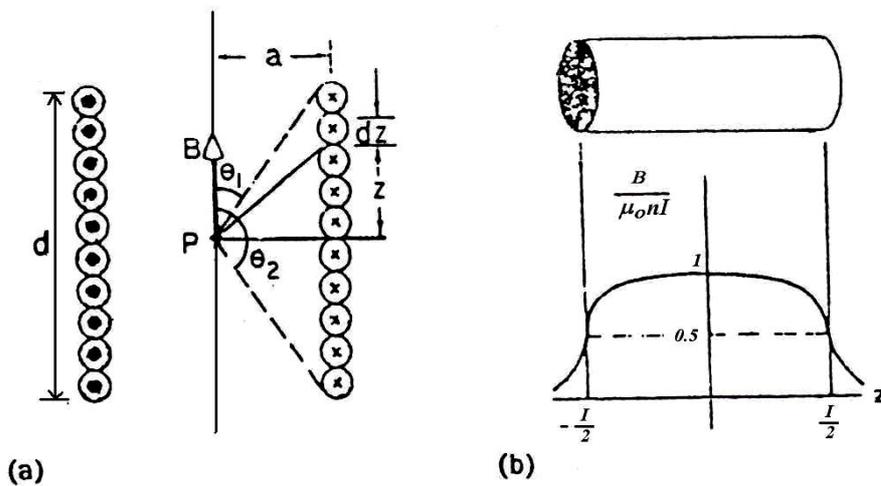


圖5

(二) 磁場強度的測量:

1879年，霍爾(E. H. Hall)在約翰霍普金斯大學(Johns Hopkins University)發表了測量導體中電荷載子的正負符號的實驗。圖6表示一片扁平的導體長條，載有電流*i*，方向如圖所示。旁邊標示*i*的電流箭號之方向，是指在電荷載子為正電荷的情況下，它們移動的方向。電流的箭號可以代表向下移動的正電荷(如圖6a)或向上移動的負電荷(如圖6b)。霍爾效應可以用來決定實際情況是屬於這兩種情況中的那一種。

如果把這條金屬片放在電磁鐵的兩個極面(poleface)之間，而且使磁場*B*與金屬片垂直，磁場會對金屬片

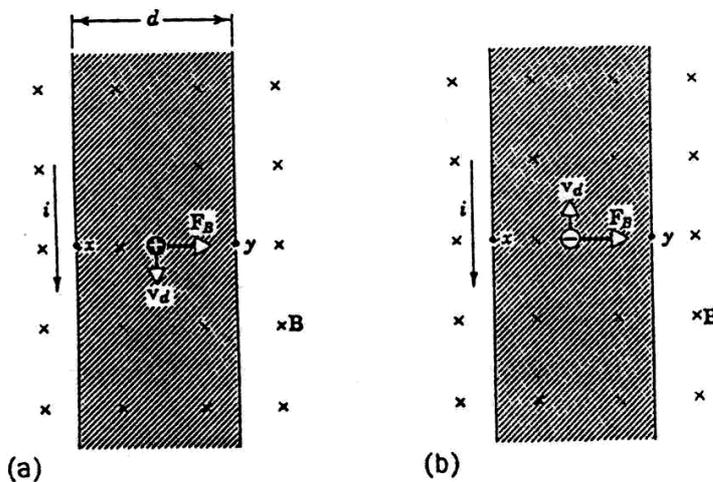


圖6 在位於磁場*B*內的長條形導體薄片上通以電流*I*，(a) 假設電荷載子帶正電；  
(b) 假設電荷載子帶負電。

施一個偏折力  $F_B$  (可以由  $il \times B$  算出), 力的方向指向圖的側方。由於這個側向力是由作用在各個電荷載子上的側向力 ( $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ) 而來的。因此, 無論電荷載子是正的還是負的, 當它們在金屬片裡漂移時, 都會有向圖6的右緣移動的趨勢, 而造成  $x$ 、 $y$  兩點間有一個電位差  $V_{xy}$ , 稱為橫向霍爾電位差 (transverse Hall potential difference)。電荷載子的電性符號可以由霍爾電位差的正、負號來決定。如果電荷載子帶正電,  $y$  點的電位比  $x$  點高; 如果載子為負電荷, 則  $y$  點的電位比  $x$  點低。實驗的結果顯示: 金屬中的電荷載子帶負電。

本實驗所用的霍爾探針是以 InAs 為材料, 利用  $V_{xy}$  的測量來決定該探針所處位置磁場的大小。

### 三、儀器與配件:

直流電源、各種環形線圈、螺線管、霍爾探針、校正線圈、固定線圈和探針用支架、高斯表。

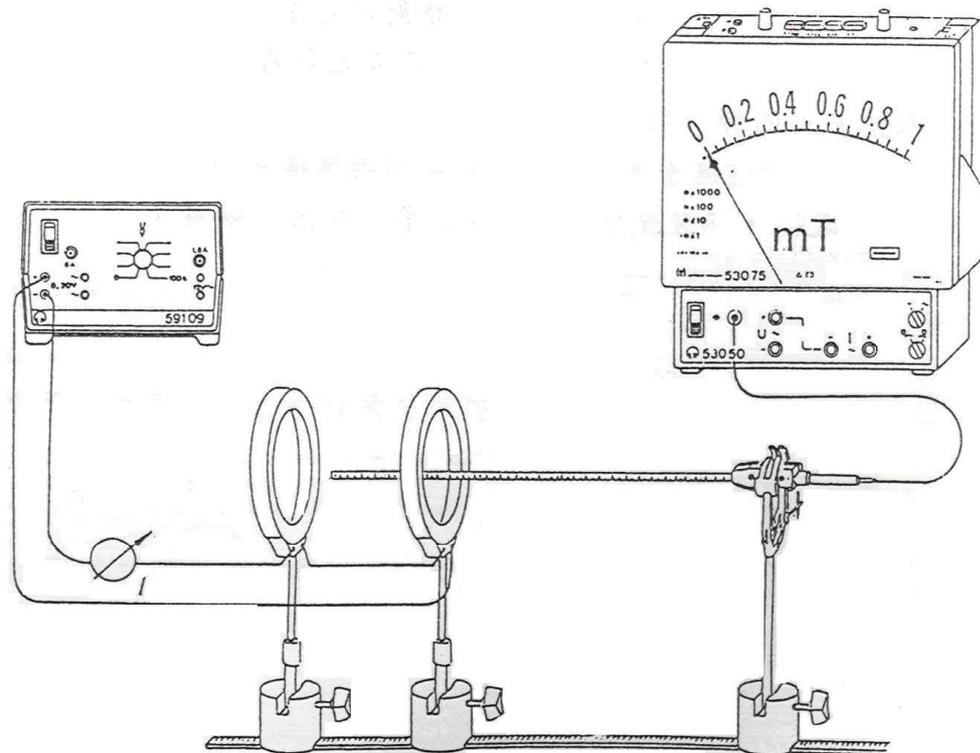


圖7

#### 四、步驟:

1. 探針及高斯表歸零校正: 將探針接好, 由高斯表頂面  $B=0$  孔插入, 使用  $B=0$  鈕將高斯表歸零。校正線圈通以 1A 電流, 將探針置入校正線圈中, 調整高斯表頂面 cal. 鈕, 使指針指在 10mT 位置。
2. 依圖 7 方式固定好線圈和霍爾探針。接好單線圈、直流電源和電流表。儀器擺置方向宜使線圈軸與地磁方向互相垂直(為什麼?)
3. 小心調整探針的位置, 測量沿線圈對稱軸上各點的磁場強度。注意電流方向, 不可使高斯表讀數為負。
4. 測量與軸平行的某一線上, 由單線圈電流引起之磁場強度, 並檢驗是否符合公式(2)、(3)、(4)。
5. 改接電路, 測量環形雙線圈沿軸及與軸平行線上之  $B_z$ 。
6. 改用螺線管重覆上述測量。

#### 五、問題:

1. 估計本實驗中線圈內磁場之大小, 並與地磁(0.5 Gauss) 作比較。
2. 你認為霍爾探針的靈敏區域有多大? 為什麼? 有沒有辦法以實驗方式驗證之?